

INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS

ARXIU DE LA SECCIÓ DE CIÈNCIES, LXXXV

JOAN DE SOLÀ-MORALES I RUBIÓ

De la Societat Catalana de Ciències Físiques, Químiques i Matemàtiques

EQUACIONS DE
NAVIER-STOKES EN UN
CANAL AMB OBSTACLE

PREMI FERRAN SUNYER I BALAGUER, 1983

BARCELONA

1986

**EQUACIONS DE NAVIER-STOKES
EN UN CANAL AMB OBSTACLE**

INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS

ARXIU DE LA SECCIÓ DE CIÈNCIES, LXXXV

JOAN DE SOLÀ-MORALES I RUBIÓ

De la Societat Catalana de Ciències Físiques, Químiques i Matemàtiques

EQUACIONS DE
NAVIER-STOKES EN UN
CANAL AMB OBSTACLE

PREMI FERRAN SUNYER I BALAGUER, 1983

BARCELONA

1986

L'EXCMA. DIPUTACIÓ PROVINCIAL DE BARCELONA
HA CONTRIBUÏT GENEROSAMENT
A L'EDICIÓ D'AQUEST VOLUM

ISBN: 84-7283-096-9
Dipòsit legal: B. 39.056-1986

© Joan de Solà-Morales i Rubió - Barcelona
La present edició és propietat de l'INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS

A proposta d'una ponència formada pels senyors Josep Teixidor i Batlle, membre de la Secció de Ciències de l'INSTITUT, Manuel Castellet i Solanas, agregat d'Àlgebra a la Secció de Ciències de l'INSTITUT, i Eduard Bonet i Guinó, de la Societat Catalana de Ciències Físiques, Químiques i Matemàtiques, l'INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS, en sessió plenària tinguda el dia 28 de maig de 1983, acordà per unanimitat de concedir el III Premi Ferran Sunyer i Balaguer al senyor Joan de Solà-Morales i Rubió pel seu treball *Equacions de Navier-Stokes en un canal amb obstacle*.

En sessió plenària del dia 3 de febrer de 1984, l'INSTITUT prengué l'acord de publicar la dita obra, la qual és editada a cura del senyor Josep Teixidor i Batlle.

This One



J6DX-7AD-X7JF

Aquest treball és la Memòria que l'autor presentà per a l'obtenció del grau de Doctor a la Universitat Autònoma de Barcelona. Fou dut a terme sota la direcció del Professor Carles Perelló i Valls al Departament de Matemàtiques de la mateixa Universitat.

1. INTRODUCCIÓ

1.1. EL PROBLEMA

En aquest treball estudiarem els moviments que es produeixen al si d'un fluid incompressible, homogeni i viscos que ocupa l'espai comprès entre dues plaques planes infinites i paral·leles, quan un obstacle rígid submergit, i que té la forma d'un cilindre infinit de secció arbitrària i generatrius paral·leles a les plaques, es mou amb velocitat constant, paral·lela a les plaques i ortogonal a les generatrius. La situació és esquematitzada a la fig. 1.

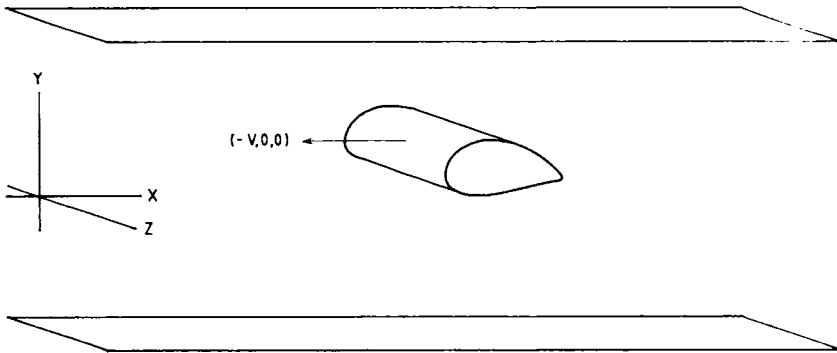


Fig. 1

Suposarem que el fluid estava "inicialment en repòs", i per a nosaltres això voldrà dir que a distàncies grans de l'obstacle la velocitat de les partícules del fluid haurà d'ésser petita.

Suposarem, com indica la fig. 1, que la velocitat de l'obstacle està dirigida segons l'eix de les X. En tot el treball suposarem que la velocitat de les partícules del fluid en tot punt no té component en la direcció de l'eix Z, i igualment que les altres components de la velocitat i la pressió són independents de la coordenada Z. D'aquesta manera el nostre és un problema pla.

Per a cada problema podem escollir les unitats de longitud de manera que la distància entre les plaques sigui 2, les unitats de massa que facin que la densitat (constant) del fluid sigui 1 i les unitats de temps per a fer valer 1 la viscositat cinemàtica. Si en el sistema de mesures inicial la distància entre les plaques era $2d$, la viscositat cinemàtica ν i la component en X de la velocitat era $-V$, en el nou sistema de mesures la velocitat de l'obstacle serà $-Vd/\nu = -R$, on R és l'habitual nombre de Reynolds, que en el nostre cas pot ésser positiu, negatiu o zero segons sigui la velocitat V .

Treballarem en un sistema de coordenades lligat a l'obstacle, i per tant inercial. Expressat en aquest sistema de coordenades el camp de velocitats de les partícules del fluid ha d'anul·lar-se a la frontera de l'obstacle i ha de tendir a valer el vector $(R, 0)$ a l'infinit i a les parets del canal. Vista així, la situació és la d'un obstacle submergit en un corrent homogeni situat entre dues plaques que es mouen a la mateixa velocitat que el corrent.

Admetrem també la presència de forces de cos que actuïn sobre les partícules de fluid, però demanant que expressades en el sistema de coordenades lligat al cos no depenguin del temps.

Si anomenem $V(x, y, t)$ la velocitat a l'instant de temps t de la partícula que ocupa la posició (x, y) , s'han de complir les equacions de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial}{\partial t} V + \langle V, \nabla \rangle V = -\text{grad } p + \Delta V + f \quad (1)$$

on $\langle V, \nabla \rangle$ simbolitza l'operador diferencial següent, que actua component a component:

$$\langle V, \nabla \rangle = \langle (V_1, V_2), \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \rangle = V_1 \frac{\partial}{\partial x} + V_2 \frac{\partial}{\partial y}$$

i p és la pressió. Igualment s'ha de complir la condició d'incompressibilitat

$$\text{div } V = 0 \quad (2)$$

i les condicions de frontera:

$$\begin{aligned} V &= (0, 0) \text{ a les parets de l'obstacle} \\ V &= (R, 0) \text{ a les parets del canal} \\ V(x, y) &\rightarrow (R, 0) \text{ si } |x| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3)$$

El problema de valor inicial consistirà a trobar $V(x, y, t)$ satisfent (1), (2) i (3) i a més la condició inicial $V(x, y, 0) = V_0$. Les solucions estacionà-

ries seran aquelles que compleixin (1), (2) i (3) i a més

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{V} \equiv 0.$$

Considerarem també les equacions de Stokes, que són una linealització de les de Navier-Stokes, suposades prou bones quan $|\mathbf{R}|$ és petit:

$$-\Delta \mathbf{V} + \text{grad } p = \mathbf{f} \quad (4)$$

que s'han de complir juntament amb (2) i (3).

1.2. PARADOXA DE STOKES

El problema que estudiem té un aspecte similar al problema del flux al voltant d'un obstacle cilíndric en un medi infinit en totes direccions. Aquest segon problema ha estat molt estudiat, però des del punt de vista matemàtic ha resultat sempre difícil d'atacar, almenys en comparació al problema corresponent per a un obstacle afitat a $\mathbf{R}^3$.

La primera dificultat fou la famosa Paradoxa de Stokes. Aquest resultat sorprenent diu que no hi ha solució per al problema de Stokes (equacions (4) i (2) de l'apartat anterior amb les condicions de frontera escaients per a un medi infinit) amb $\mathbf{f} = 0$ i $\mathbf{R} \neq 0$. En canvi, aquest problema sí que té solució per al flux al voltant d'un obstacle afitat a $\mathbf{R}^3$. (Per a formulacions més precises i la demostració dels resultats, vegeu Chang i Finn (1961).)

De manera similar, per al problema estacionari en un medi infinit no ha estat demostrada fins ara l'existència de solucions per a qualsevol valor de $\mathbf{R}$. El resultat més general en aquesta direcció és el de Finn i Smith (1967) que assegura l'existència de solucions estacionàries, però només per a $|\mathbf{R}|$ prou petit. Aquest resultat complementa i millora el resultat clàssic de Leray (1933) que prova l'existència de solucions estacionàries per a qualsevol valor de $\mathbf{R}$ amb integral de Dirichlet finita, però de les quals fins ara no s'ha pogut demostrar que compleixin les condicions a l'infinit.

A part del problema estacionari, les experiències de laboratori posen de manifest l'existència d'una solució estacionària estable per al flux al voltant d'un obstacle cilíndric si $\mathbf{R}$ és prou petit, i que quan $\mathbf{R}$ creix aquesta solució esdevé inestable i apareix una solució estable periòdica en el temps caracteritzada qualitativament per l'oscil·lació d'una estela darrera l'obstacle (Marsden i MacCracken (1976), p. 14).

Aquest fenomen "d'intercanvi d'estabilitats" entre una solució estacionària i una de periòdica correspon a una previsible bifurcació de Hopf, fenomen molt estudiat els darrers anys (Iooss (1972), Joseph i Sattinger (1972), Judovich (1971)). Amb tot, per a dominis no afitats, la presència

d'una part contínua de l'espectre dels operadors que apareixen en el problema posa en qüestió si els resultats coneguts fins ara per a la bifurcació de Hopf poden aplicar-s'hi directament.

1.3. DEFINICIONS I NOTACIÓ

Sigui $Q = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < 1 \}$, el canal, i sigui S (l'obstacle) la clausura d'un obert de $\mathbb{R}^2$ afitat, amb frontera de classe $\mathcal{C}^2$, tal que $S \subset Q$. Definim $\Omega = Q - S$, i admetem la possibilitat que $S = \emptyset$.

Considerarem els espais de Sobolev sobre $L_2(\Omega)$, $H^s(\Omega)$, per s enter, $s \geq 0$, i també els espais $H_0^s(\Omega)$, constituïts per la clausura a $H^s(\Omega)$ de les funcions infinitament diferenciables a Ω i amb suport compacte contingut a Ω , $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Els espais $H^{-s}(\Omega)$ per s enter i $s \geq 0$ es defineixen com el dual topològic de $H_0^s(\Omega)$. Tots ells són espais de Hilbert (vegeu Adams (1975)).

Escriurem $(\cdot, \cdot)_E$ per al producte escalar d'un espai de Hilbert E . El producte escalar de dos vectors x i y de $\mathbb{R}^n$ l'escriurem $x^T y$, bé que usarem $(x)^2$ en lloc de $x^T x$. El signe $\langle, \rangle$, a més d'usar-se en l'expressió simbòlica $\langle V, \nabla \rangle$, el reservarem per al producte intern d'una parella d'espais en dualitat: així, si p és una distribució a Ω i ϕ una funció de prova ($\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ($\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$), escriurem $\langle p, \phi \rangle$ per a indicar el valor de p a ϕ .

Com habitualment, usarem a $L_p(\Omega)^n$, per $1 \leq p < \infty$, la norma

$$|| (f_1, f_2, \dots, f_n) ||_{L_p(\Omega)^n}^p = ||f_1||_{L_p(\Omega)}^p + ||f_2||_{L_p(\Omega)}^p + \dots + ||f_n||_{L_p(\Omega)}^p$$

i també

$$|| (f_1, f_2, \dots, f_n) ||_{L_\infty(\Omega)^n} = \max \{ ||f_1||_{L_\infty(\Omega)}, ||f_2||_{L_\infty(\Omega)}, \dots, ||f_n||_{L_\infty(\Omega)} \}$$

Tindran importància especial els espais següents:

$$\mathcal{J}(\Omega) = \{ \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)^2 \mid \operatorname{div} \phi = 0 \}$$

$$\mathring{\mathcal{J}}(\Omega) = \text{clausura a } L_2(\Omega)^2 \text{ de } \mathcal{J}(\Omega)$$

$$H(\Omega) = \text{clausura a } H_0^1(\Omega)^2 \text{ de } \mathring{\mathcal{J}}(\Omega)$$

$$H_{0,\sigma}^1(\Omega) = \{ \phi \in H_0^1(\Omega)^2 \mid \operatorname{div} \phi = 0 \}$$

És un resultat ben conegut (Ladyzhenskaya (1969), p. 27) que l'ortogonal de $\mathring{\mathcal{J}}(\Omega)$ dins $L_2(\Omega)^2$ és l'espai $G(\Omega)$ format pels camps $\phi \in L_2(\Omega)^2$

tals que existeix una distribució p sobre Ω tal que $\phi = \text{grad } p$. Fàcilment es veu que $p \in L_{2,\text{loc}}(\Omega)$. Denotarem P la projecció ortogonal de $L_2(\Omega)^2$ en $J(\Omega)$. Els elements de $J(\Omega)$ són camps de divergència (distribucional) zero que són paral·lels a $\partial\Omega$ en cert sentit (Temam (1977), p. 9). Els elements de $H(\Omega)$ són camps de divergència zero que s'anul·len a $\partial\Omega$ en el sentit de les traces. Demostrarem que $H_{0,\sigma}^1(\Omega) = H(\Omega)$.

Per al plantejament de les equacions de Navier-Stokes i de Stokes en termes de solucions en espais de Sobolev usarem un camp de vectors auxiliar $\vec{a}$ de $C^\infty(\Omega)^2$ tal que $\text{div } \vec{a} = 0$ i tal que $\vec{a} = (0, 0)$ en un entorn de ∂S , i $\vec{a} = (1, 0)$ fora d'un compacte $K \subset \Omega$. Un camp $\vec{a}$ concret amb aquestes propietats pot construir-se de la manera següent:

Sigui $\rho(x, y)$ una funció de $C^\infty(\Omega)$ que valgui 1 en un entorn de ∂S i zero fora d'un compacte K , $K \subset \Omega$. Definim

$$\vec{a}(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial y} [y(1 - \rho(x, y))], -\frac{\partial}{\partial x} [y(1 - \rho(x, y))] \right).$$

Aleshores, busquem les solucions de (1) o (4) d'1.1 de la forma $V(x, y, t) = u(x, y, t) + R\vec{a}$. Com que V ha de complir les condicions (2) i (3) d'1.1, tenim que u ha de complir

$$\begin{aligned} \text{div } u &= 0 \\ u &= (0, 0) \text{ a } \partial S \\ u &= (0, 0) \text{ a } \partial Q \\ u(x, y) &\rightarrow (0, 0) \quad \text{si } |x| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Aquestes condicions es resumeixen en la condició única $u \in H(\Omega)$. No inclou la condició $u(x, y) \rightarrow (0, 0)$ si $|x| \rightarrow \infty$ però sí les altres tres. El comportament de la solució a l'infinit haurà d'ésser estudiat a posteriori.

En aquests termes, les equacions de Navier-Stokes queden

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u + \langle R\vec{a}, \nabla \rangle u + \langle u, \nabla \rangle R\vec{a} + \langle u, \nabla \rangle u &= \\ = -\text{grad } p + \Delta u + f + R\Delta\vec{a} - R^2 \langle \vec{a}, \nabla \rangle \vec{a} \end{aligned}$$

i les de Stokes

$$-\Delta u + \text{grad } p = f + R\Delta\vec{a}$$

1.4. DESIGUALTATS I RENORMALITZACIONS

Farem ús de la desigualtat següent (Ladyzhenskaya (1969), p. 8), vàlida per a tota funció $f \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} f^4 \, dx \, dy \leq 2 \int_{\Omega} f^2 \, dx \, dy \int_{\Omega} (\nabla f)^2 \, dx \, dy$$

que per als camps $u \in H(\Omega)$ queda, aplicada a cada component,

$$||u||_{L_4(\Omega)^2} \leq \sqrt{2} \, ||u||_{L_2(\Omega)^2}^{1/2} ||\nabla u||_{L_2(\Omega)^4}^{1/2}$$

A part d'aquesta desigualtat, com que Ω està comprès entre dues rectes paral·leles a distància 2, tenim la desigualtat, coneguda com de Poincaré, per $f \in H_0^1(\Omega)$ (vegeu Hardy, Littlewood i Pólya (1973), p. 185):

$$\int_{\Omega} f^2 \, dx \, dy \leq \frac{4}{\pi^2} \int_{\Omega} (\nabla f)^2 \, dx \, dy$$

Si $u \in H_0^1(\Omega)^2$ tenim, per tant:

$$||u||_{L_2(\Omega)^2} \leq \frac{2}{\pi} ||\nabla u||_{L_2(\Omega)^4} \quad (1)$$

Això ens permet de renormalitzar els espais $H_0^1(\Omega)^2$, $H_{0,\sigma}^1(\Omega)$ i $H(\Omega)$ amb el producte escalar equivalent

$$(\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)^4}$$

i així ho farem d'ara endavant.

Però notem que si $u \in H(\Omega)$ la desigualtat (1) és, en principi, millorable, car no hi hem tingut en compte que $\operatorname{div} u = 0$. Per això, quan ens interressin afitacions precises usarem la desigualtat

$$||u||_{L_2(\Omega)^2} \leq C \, ||\nabla u||_{L_2(\Omega)^4} \quad \text{per } u \in H(\Omega).$$

On C és definida, naturalment, per

$$C^{-2} = \inf_{\substack{u \in H(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{||\nabla u||_{L_2(\Omega)^4}^2}{||u||_{L_2(\Omega)^2}^2}$$

Sabem que

$$C \leq \frac{2}{\pi},$$

i al capítol 6 d'aquest treball serà obtingut el valor de C amb tot rigor. En principi pot pensar-se que C depèn de Ω . Això no és així si Ω és de la forma $\Omega = \bar{Q} - S$ amb S afitat i Q d'amplada 2.

1.5. RESUM DE RESULTATS

Capítol 2

En aquest capítol s'estudia el problema de Stokes. El principal resultat és que l'equació de Stokes

$$-\Delta u + \text{grad } p = f + R \Delta \vec{a} \quad (1)$$

té una solució única $u \in H(\Omega) \cap H^2(\Omega)^2$ per $f \in L_2(\Omega)^2$ i per qualsevol valor de R . En altres paraules: no hi ha paradoxa de Stokes. A més es prova que $u(x, y)$ tendeix a zero quan $|x|$ tendeix a ∞ uniformement en y . Obtenim també que $\text{grad } p \in G(\Omega)$.

El capítol comença demostrant la igualtat $H_{0,\sigma}^1(\Omega) = H(\Omega)$, que, d'acord amb les consideracions de Heywood (1976), prova que la solució obtinguda és única entre les que tenen integral de Dirichlet finita.

Usant la projecció P definida a 1.3 l'equació (1) pot escriure's

$$-P \Delta u = P(f + R \Delta \vec{a}).$$

Com que $P(f + R \Delta \vec{a}) \in \mathcal{J}(\Omega)$, podem mirar-nos l'operador $-P \Delta$ com un operador de $\mathcal{J}(\Omega)$ definit (densament) a $H^2(\Omega)^2 \cap H(\Omega)$. Hom demostra que aquest operador, anomenat operador de Stokes, és autoadjunt i positiu.

Capítol 3

S'hi estudien les equacions de Navier-Stokes estacionàries. El principal resultat és l'existència d'almenys una solució estacionària $u \in H^2(\Omega)^2 \cap H(\Omega)$ per a qualsevol valor de R i per a qualsevol $f \in L_2(\Omega)^2$. També és cert que u tendeix a $(0, 0)$ a l'infinit uniformement en y .

Amb f "prou petita", hom té un resultat d'unicitat si $|R|$ és prou petit.

Capítol 4

En el capítol 4 estudiem el problema de valor inicial per a les equacions de Navier-Stokes.

En realitat el que fem és aplicar resultats coneguts sobre existència i unicitat de solució d'equacions parabòliques semilineals (seguint Iooss (1973) o Henry (1981)). La característica principal d'aquesta forma de mirar-se les equacions és que les solucions obtingudes són funcions contínues del temps amb valors en espais de Banach, que defineixen en aquests espais semi-sistemes dinàmics (vegeu Mora (1981)).

Aquesta definició de solució del problema de valor inicial és diferent de la donada, per exemple, a Ladyzhenskaya (1969). Amb tot, usant les desigualtats a priori del llibre de Ladyzhenskaya citat, demostrem la continuació per tot temps positiu de les nostres solucions del problema de valor inicial.

El capítol acaba mostrant que ens trobem en les hipòtesis per a l'estabilitat o inestabilitat de les solucions estacionàries segons la part lineal. També es dona un criteri d'estabilitat asimptòtica global en mitjana quadràtica del tipus del teorema de Serrin (vegeu Joseph (1976), I, p. 15).

Capítol 5

En aquest capítol hom prova que la part no discreta de l'espectre de la part lineal en una solució estacionària es troba confinada a una regió estrictament a la dreta de l'eix imaginari, i que fora d'ella tot són valors propis aïllats de multiplicitat finita.

Aquest resultat implica que els fenòmens de bifurcació que eventualment puguin presentar-se són essencialment de dimensió finita.

Capítol 6

Per mitjà del càlcul amb transformades de Fourier en la direcció x s'obté una part no discreta no buida de l'espectre de la part lineal en qualsevol solució estacionària. Això confirma la utilitat dels resultats del capítol anterior.

Els càlculs efectuats permeten d'obtenir el valor exacte de la constant C definida a 1.4.

1.6. AGRAÏMENTS

Vull fer constar el meu agraïment al Dr. Carles Perelló, director d'aquest treball. El seu entusiasme i el seu bon criteri matemàtic han estat

per a mi un suport fonamental. No puc oblidar tampoc molts altres ajuts rebuts, especialment de Xavier Mora, Angel Calsina i Jaume Soler. Moltes gràcies, a tots.

2. EL PROBLEMA LINEAL

2.1. EL PROBLEMA

En el apartats 2.2 i 2.3 ens ocupem de demostrar que $H_{0,\sigma}^1(\Omega) = H(\Omega)$. La possibilitat que aquests espais fossin diferents fou posada de manifest per Heywood (1976) en certs dominis no afitats. Per definició és clar que $H(\Omega) \subset H_{0,\sigma}^1(\Omega)$. Si la inclusió és estricta resulta que existeix una solució diferent del problema de Stokes a $H_{0,\sigma}^1(\Omega)$ per cada classe de $H_{0,\sigma}^1(\Omega) / H(\Omega)$. La manca d'unicitat afecta també les equacions de Navier-Stokes completes, tant en el cas estacionari com en el no estacionari.

El nostre resultat (Teorema 2.3) és un cas particular del Teorema enunciat a Solonnikov (1980), p. 289, sense demostració. Altres resultats similars es troben a Ladyzhenskaya i Solonnikov (1976).

2.2. LEMA

$$H(Q) = H_{0,\sigma}^1(\Omega)$$

Abans de fer-ne la demostració advertim que la mateixa demostració prova el resultat següent:

Corol·lari

Sigui $Z = \{ (x, y) \in Q \mid |x| \leq a, |y| \leq b \}$ per $0 < a, 0 < b < 1$,
 $Z_\varepsilon = \{ (x, y) \in Q \mid |x| \leq a - \varepsilon, |y| \leq b - \varepsilon \}$ per $\varepsilon > 0$. Sigui $u \in H_{0,\sigma}^1(Q)$ tal que $u(x, y) = (0, 0)$ p.p. $(x, y) \in Z$. Aleshores, per a tot $\varepsilon > 0$ amb $\varepsilon < \min(a, b)$ es compleix que $u \in H(Q - Z_\varepsilon)$.

Demostració del lema

Sigui $u = (u_1, u_2) \in H_{0,\sigma}^1(Q)$. Prolonguem u per zero fora de Q i tenim que $u \in H_{0,\sigma}^1(\mathbb{R}^2)$. Donat $\varepsilon > 0$, considerem $u^\varepsilon(x, y) = (u_1(x, (1 + \varepsilon)y),$

$(1 + \varepsilon)^{-1} u_2(x, (1 + \varepsilon)y)$). Òbviament $u^\varepsilon \in H_{0,\sigma}^1(Q)^2$ i a més $u^\varepsilon(x, y) = (0, 0)$ si $|y| > (1 + \varepsilon)^{-1}$. També $\operatorname{div} u^\varepsilon = 0$, i per tant $u^\varepsilon \in H_{0,\sigma}^1(Q)$.

A més, quan $\varepsilon \rightarrow 0$ tenim que

$$\|\nabla u^\varepsilon(x, y) - \nabla u(x, y)\|_{L_2(Q)^4} \rightarrow 0.$$

Això es comprova fàcilment usant el lema que donem més avall. Per a veure que $u \in H(Q)$, n'hi haurà prou amb demostrar, doncs, que

$$u^\varepsilon \in H(Q).$$

Prenguem un nucli de mediació ω_h amb suport de radi h prou petit, per exemple

$$h < \frac{1}{2} (1 - (1 + \varepsilon)^{-1}),$$

i considerem la convolució $u^{\varepsilon,h} = \omega_h * u^\varepsilon$. Es compleix que $u^{\varepsilon,h} \in H_{0,\sigma}^1(Q)$ i que $u^{\varepsilon,h}$ és un camp de classe C^∞ que val zero a (x, y) si $|y| > h + (1 + \varepsilon)^{-1}$. Com que $u^{\varepsilon,h} \rightarrow u^\varepsilon$ en la norma de $H_0^1(Q)^2$ quan $h \rightarrow 0$, haurem acabat si provem que $u^{\varepsilon,h} \in H(Q)$.

Siguin, per a simplificar, (v_1, v_2) les components de $u^{\varepsilon,h}$. Com que $\operatorname{div} u^{\varepsilon,h} = 0$ podem definir unívocament la funció de corrent

$$\psi(x, y) = \int_{(0, -1)}^{(x, y)} -v_2 dx + v_1 dy.$$

Notem que $\psi(x, y) = 0$ si $|y| > h + (1 + \varepsilon)^{-1}$: efectivament, com que $\operatorname{div} u^{\varepsilon,h} = 0$, pel teorema de la divergència tenim que la integral

$$\int_{(x, -1)}^{(x, 1)} -v_2 dx$$

no depèn de x . Però aquesta integral no pot tenir un valor diferent de zero ja que $v_2 \in L_2(Q)$ (usant la desigualtat de Schwarz i el Teorema de Fubini).

Com que ψ val zero als extrems del canal podem aplicar la desigualtat de Poincaré i tenim que

$$\|\psi\|_{L_2(Q)} \leq \frac{2}{\pi} \|u^{\varepsilon,h}\|_{L_2(Q)^2},$$

o sigui que $\psi \in H^2(Q)$.

Sigui ara $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funció de classe $\mathcal{C}^\infty$ que valgui 1 en un entorn de 0, i 0 en un entorn de 1. Definim

$$f_n(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| > n + 1$$

$$f_n(x) = 1 \quad \text{si} \quad |x| < n$$

$$f_n(x) = \alpha(|x| - n) \quad \text{si} \quad n \leq |x| \leq n + 1$$

per $n \in \mathbb{N}$, i considerem $\psi_n(x, y) = f_n(x) \psi(x, y)$. És fàcil de veure que $\psi_n \rightarrow \psi$ en la norma de $H^2(Q)$, ja que $\psi \in L_2(Q)$. Per tant, $(\partial \psi_n / \partial y, -\partial \bar{\psi}_n / \partial x)$ tendeix a (v_1, v_2) en la norma de $H(Q)$, i és obvi que $(\partial \psi_n / \partial y, -\partial \bar{\psi}_n / \partial x) \in J(Q)$.

Lema

Sigui $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$, $f \equiv 0$ p.p. fora de Q . Definim $f^\varepsilon(x, y) = f(x, (1 + \varepsilon)y)$, per $\varepsilon > 0$. Aleshores $f^\varepsilon \rightarrow f$ en la norma de $L_2(Q)$.

Demostració

El resultat és evident si f és contínua amb suport compacte, ja que aleshores és uniformement contínua. Com que $\mathcal{C}_0(Q)$ és dens a $L_2(Q)$, el resultat s'estén fàcilment.

2.3. TEOREMA

$$H(\Omega) = H_{0,\sigma}^1(\Omega).$$

Demostració

Recordem que $\Omega = Q - S$, i que l'únic que hem de veure és que

$$H_{0,\sigma}^1(\Omega) \subset H(\Omega).$$

Podem suposar $S \neq \emptyset$, ja que el cas $S = \emptyset$ ja l'hem vist a 2.2.

Prenem un rectangle $Z = \{(x, y) \in Q \mid |x| \leq a, |y| \leq b\}$ amb $b < 1$ de manera que S estigui contingut a l'interior de Z , i prenem tres corbes tancades e_1, e_2, e_3 contingudes a Q , de classe $\mathcal{C}^2$, que envoltin Z i que s'envoltin l'una a l'altra com indica la fig. 2 (per exemple, tres el·lipses).

Diem $A =$ exterior de Z , $B =$ punts entre e_1 i e_3 , $C =$ punts entre e_2 i ∂S . A , B i C són oberts, i $\Omega = A \cup B \cup C$.

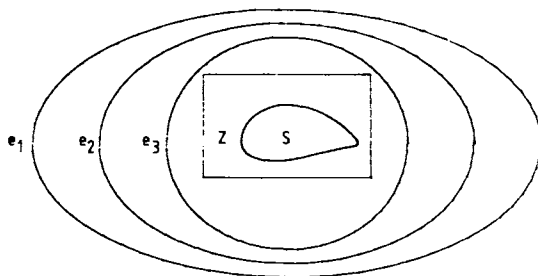


Fig. 2

Donat $u \in H_{0,\sigma}^1(\Omega)$, construïm ara un camp de divergència zero

$$u_B \in H_{0,\sigma}^1(B)$$

tal que la seva restricció a e_2 coincideixi amb la restricció de u (ambdues enteses en el sentit de les traces). Això pot fer-se, per exemple, construint-lo primer entre e_1 i e_2 amb el mètode de Ladyzhenskaya (1969), p. 24, ja que

$$\int_{e_2} u^T \vec{n} \, dS = \int_{\partial S} u^T \vec{n} \, dS = 0,$$

en ésser $\operatorname{div} u = 0$ ($\vec{n}$ és la normal exterior), i prolongant després entre e_2 i e_3 amb el mateix sistema.

Fixem-nos doncs que $u - u_B$ val zero a e_2 (en el sentit de les traces) i que per tant $u - u_B = u_A + u_C$, on u_A és la restricció de $u - u_B$ a l'exterior de e_2 , i u_C la restricció a l'interior. Tenim que (a fortiori) $u_A \in H_{0,\sigma}^1(A)$, i també que $u_B \in H_{0,\sigma}^1(B)$ i $u_C \in H_{0,\sigma}^1(C)$. Com que B i C són conjunts afitats amb frontera de classe C^2 , tenim que $H_{0,\sigma}^1(B) = H(B)$ i $H_{0,\sigma}^1(C) = H(C)$ (Heywood (1976), p. 81) i per tant $u_B \in H(\Omega)$, $u_C \in H(\Omega)$. D'altra banda pel corol·lari de 2.2 $u_A \in H(Q - Z_e)$, i prenent ε prou petit $C - Z_e \subset \Omega$. Per tant, també $u_A \in H(\Omega)$ i $u = u_A + u_B + u_C \in H(\Omega)$.

2.4. EL PROBLEMA DE STOKES

En els apartats que segueixen demostrarem que el problema de Stokes té una solució única $u \in H^2(\Omega)^2 \cap H(\Omega)$. L'existència i la unicitat de la solució seran conseqüència del Teorema de Riesz. El que porta més problemes és la regularitat de la solució. Concretament, es necessiten resultats de regularitat fins a la frontera per a les derivades segones de les components de u , del tipus dels d'Agmon, Douglis i Nirenberg (1964), amb la dificultat que la frontera de Ω té components no afittades. Com es veurà, com que les components no afittades de $\partial\Omega$ són rectes, el problema es redueix al cas afitat.

Les proposicions 2.5 i 2.6 que segueixen són tretes del llibre Temam (1977), pp. 14 i 15, i les donem sense demostració. La primera és en realitat una part d'un resultat important de de Rham (1960).

La proposició 2.7 també és treta de Temam (1977), p. 33, on té una forma més general. La demostració està basada en el treball citat d'Agmon, Douglis i Nirenberg, i de fet es tracta del resultat a $\mathbb{R}^2$ equivalent al de Cattabriga (1961) a $\mathbb{R}^3$.

2.5. PROPOSICIÓ

Sigui Ω un obert de $\mathbb{R}^n$ i $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ amb $f_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $i = 1, 2, \dots, n$. Una condició necessària i suficient perquè existeixi $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $f = \text{grad } p$ és que

$$\sum_{i=1}^n \langle f_i, \phi_i \rangle = 0$$

per a tota $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) \in \mathcal{J}(\Omega)$.

2.6. PROPOSICIÓ

Sigui Ω un obert afitat de Lipschitz de $\mathbb{R}^n$. Si una distribució p té totes les seves derivades primeres $D_i p$, $i = 1, 2, \dots, n$ a $H^{-1}(\Omega)$, aleshores

$$p \in L_2(\Omega)$$

i

$$\|p\|_{L_2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C(\Omega) \|\text{grad } p\|_{H^{-1}(\Omega)^n}$$

on la norma de p a $L_2(\Omega)/\mathbb{R}$ vol dir la norma de la projecció de p en el subespai de $L_2(\Omega)$ ortogonal a les constants.

2.7. PROPOSICIÓ

Sigui Ω un obert afitat de classe C^2 . Suposem que

$$u \in H_0^1(\Omega)^2, p \in L_2(\Omega)$$

i es compleix la igualtat $-\Delta u + \text{grad } p = f$ a Ω (en sentit distribucional) i a més $\text{div } u = g$. Si $f \in L_2(\Omega)^2$ i $g \in H^1(\Omega)$, aleshores $u \in H^2(\Omega)$, $p \in H^1(\Omega)$ i es compleix

$$\|u\|_{H^2(\Omega)^2} + \|p\|_{H^1(\Omega)} \leq C (\|f\|_{L_2(\Omega)^2} + \|g\|_{H^1(\Omega)})$$

per a una constant $C > 0$ independent de f , g , u i p .

2.8. PROPOSICIÓ

Sigui $\Omega = Q - S$. Suposem que per a un cert $u \in H(\Omega)$ i una certa

$$f \in L_2(\Omega)^2$$

es compleix la igualtat

$$(\nabla u, \nabla \phi)_{L_2(\Omega)^4} = (f, \phi)_{L_2(\Omega)^2} \quad \forall \phi \in \dot{J}(\Omega).$$

Aleshores, $u \in H^2(\Omega)^2$ i

$$\|u\|_{L^2(\Omega)^2} \leq K \|f\|_{L_2(\Omega)^2}$$

per a una certa constant $K > 0$ independent de f i de u . I a més existeix

$$p \in L_{2, \text{loc}}(\Omega) \quad \text{amb} \quad \text{grad } p \in L_2(\Omega)^2$$

tal que

$$-\Delta u + \text{grad } p = f$$

Demostració

Com que tots dos membres de la igualtat $(\nabla u, \nabla \phi)_{L_2(\Omega)^4} = (f, \phi)_{L_2(\Omega)^2}$ són continus en $\phi \in \dot{J}(\Omega)$ amb la norma de $H(\Omega)$, la igualtat s'estén per

continuitat a tot $\phi \in H(\Omega)$. En escriure-la per $\phi = u$ obtenim:

$$||u||_{H(\Omega)} \leq ||f||_{L_2(\Omega)^2} \quad (1)$$

Considerem ara la distribució (de dues components) $\Delta u + f$. Per definició, si $\phi \in \mathcal{J}(\Omega)$ $\langle \Delta u + f, \phi \rangle = (u, \Delta \phi)_{L_2(\Omega)^2} + (f, \phi)_{L_2(\Omega)^2}$ i com que

$$u \in H^1(\Omega)^2$$

tenim que

$$\langle \Delta u + f, \phi \rangle = -(\nabla u, \nabla \phi)_{L_2(\Omega)^4} + (f, \phi)_{L_2(\Omega)^2} = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{J}(\Omega)$$

Per la proposició 2.5 existeix doncs una distribució p a Ω tal que

$$\Delta u + f = \text{grad } p,$$

en sentit distribucional.

El raonament que segueix és vàlid en tot conjunt Ω' de la forma

$$\Omega'(a, b) = \{ (x, y) \in \Omega \mid a-1 < x < b+1 \} \text{ per } a < b,$$

sempre que es compleixi la condició que

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < 1, a-1 \leq x \leq a, \text{ o } b \leq x \leq b+1 \} \subset \Omega,$$

és a dir, sempre que S en cas d'estar totalment o parcialment inclòs a "dins" de Ω' estigui prou allunyat dels extrems de Ω' . Aquest raonament serà emprat més endavant per a certs valors de a i de b .

Sigui $\tilde{u}$ la restricció de u a Ω' . $\tilde{u} \in H^1(\Omega')$. Recordem que $H^{-1}(\Omega')$ es defineix com el dual topològic de $H_0^1(\Omega')$ i que la norma d'un element de $H^{-1}(\Omega')$ és la norma del funcional lineal continu que defineix sobre $H_0^1(\Omega')$. D'això dedueix que

$$||\Delta \tilde{u}||_{H^{-1}(\Omega')^2} \leq ||\tilde{u}||_{H^1(\Omega')^2}$$

També, si $\tilde{f}$ és la restricció de f a Ω' es dedueix fàcilment que

$$||\tilde{f}||_{H^{-1}(\Omega')^2} \leq ||f||_{L_2(\Omega)^2}$$

Prenem la restricció de p com a distribució de $\mathcal{D}'(\Omega')$, que en direm $\tilde{p}$. Es compleix que

$$\Delta \tilde{u} + \tilde{f} = \text{grad } \tilde{p}$$

i en conseqüència

$$\text{grad } \tilde{p} \in H^{-1}(\Omega')^2 \quad i \quad ||\text{grad } \tilde{p}||_{H^{-1}(\Omega')^2} \leq ||\tilde{f}||_{H^{-1}(\Omega')^2} + ||\tilde{u}||_{H^1(\Omega')^2}.$$

Definim ara una funció $\psi(x)$:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= 1 \quad \text{si } x \in (a, b) \\ \psi(x) &= 0 \quad \text{si } x \in (-\infty, a-1) \cup (b+1, +\infty) \\ \psi(x) &= \alpha(x-b) \quad \text{si } x \in [b, b+1] \\ \psi(x) &= \alpha(a-x) \quad \text{si } x \in [a-1, a] \end{aligned}$$

on $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció de classe $\mathcal{C}^\infty$ que val 1 en un entorn de 0, i 0 en un entorn de 1.

Fixem ara una manera d'arrodonir la frontera de Ω' , i construïm un obert $\tilde{\Omega} \subset \Omega'$ de manera que si $(x, y) \in \Omega'$ i $x \in$ suport de ψ aleshores

$$(x, y) \in \tilde{\Omega},$$

i de manera que $\partial \tilde{\Omega}$ sigui de classe $\mathcal{C}^2$. En dir fixar, volem dir prendre una manera de fer-ho independent de a, b . Podem fer-ho, perquè S està allunyat de la zona on fem la cirurgia (vegeu la fig. 3).

Diem que $v(x, y) = \psi(x) \tilde{u}(x, y)$. Tenim que $v \in H_0^1(\tilde{\Omega})^2$ i compleix a $\tilde{\Omega}$

$$-\Delta v + \text{grad}(\psi \tilde{p}) = \tilde{p} \text{grad } \psi + \psi \tilde{f} - \Delta \psi \tilde{u} + 2 \langle \text{grad } \psi, \nabla \rangle \tilde{u} \quad (2)$$

$$\text{div } v = (\text{grad } \psi)^T \tilde{u}$$

usant que $-\Delta \tilde{u} + \text{grad } \tilde{p} = \tilde{f}$ i que $\text{div } \tilde{u} = 0$.

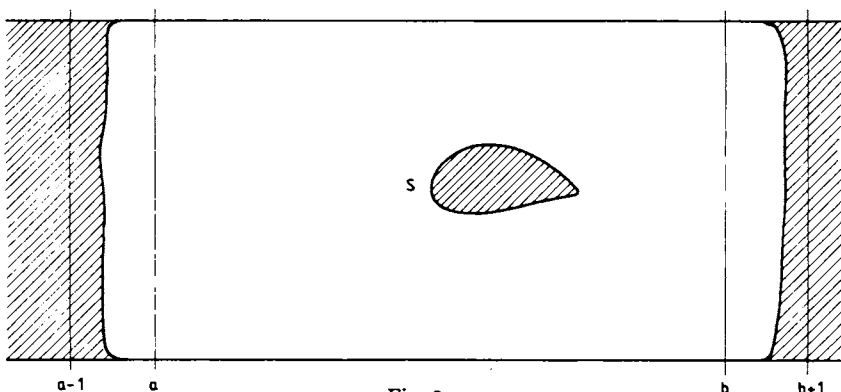


Fig. 3

Anem a veure que estem en les hipòtesis de la Proposició 2.7: certament, $v \in H_0^1(\tilde{\Omega})^2$. També $\psi \tilde{p} \in L_2(\tilde{\Omega})$, car $p \in L_2(\tilde{\Omega})$ per la Proposició 2.6. També és cert que $\text{div } v \in H^1(\tilde{\Omega})$. Per a veure que el segon membre de la igualtat (2) és a $L_2(\tilde{\Omega})$, només cal constatar de nou que $\tilde{p} \in L_2(\tilde{\Omega})$. A més:

$$\|(\text{grad } \psi)^T \tilde{u}\|_{H^1(\tilde{\Omega})} \leq K_1 \|\tilde{u}\|_{H^1(\tilde{\Omega})^2}$$

on K_1 només depèn de l'elecció de $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

I també

$$\begin{aligned} \|\tilde{p} \text{ grad } \psi + \psi \tilde{f} - \Delta \psi \tilde{u} + 2 \langle \text{grad } \psi, \nabla \rangle \tilde{u}\|_{L_2(\tilde{\Omega})^2} &\leq \\ &\leq K_2(\tilde{\Omega}) (\|\tilde{f}\|_{L_2(\tilde{\Omega})^2} + \|\tilde{u}\|_{H^1(\tilde{\Omega})^2}) \end{aligned}$$

on K_2 depèn de la funció α i de la constant $C(\tilde{\Omega})$ de la Proposició 2.6.

Finalment, per la Proposició 2.7, $v \in H^2(\Omega)^2$ i

$$\|v\|_{H^2(\tilde{\Omega})^2} \leq K_3(\tilde{\Omega}) (\|\tilde{f}\|_{L_2(\tilde{\Omega})^2} + \|\tilde{u}\|_{H^1(\tilde{\Omega})^2})$$

Si definim ara $\Omega^n(a, b) = \{(x, y) \in \Omega \mid a < x < b\}$ tenim

$$\|u\|_{H^2(\Omega^n)^2} \leq K_3(\tilde{\Omega}) (\|f\|_{L_2(\Omega^n)^2} + \|u\|_{H^1(\Omega^n)^2})$$

i a més hem demostrat que $u \in H_{\text{loc}}^2(\Omega)$. Vegem ara que $u \in H^2(\Omega)$. Sigui $n \in \mathbb{N}$ de manera que $S \subset \{(x, y) \mid |x| < n-1\}$ i considerem Ω' com cadascun dels conjunts $\Omega'(-n, n)$, i $\Omega'(j, j+1)$ per $j = n, n+1, n+2, \dots$ i $j = -n-1, -n-2, \dots$, successivament. Tenim

$$\|u\|_{H^2(\Omega'(-n, n))} \leq K_3(\tilde{\Omega}(-n, n)) (\|f\|_{L_2(\Omega'(-n, n))^2} + \|u\|_{H^1(\Omega'(-n, n))^2}) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2(\Omega'(j, j+1))} &\leq K_3(\tilde{\Omega}(j, j+1)) (\|f\|_{L_2(\Omega'(j, j+1))^2} + \\ &+ \|u\|_{H^1(\Omega'(j, j+1))^2}) \end{aligned} \quad (4)$$

per $j = n, n+1, n+2, \dots$ i $j = -n-1, -n-2, \dots$. El que és essencial és que els conjunts $\tilde{\Omega}(j, j+1)$ considerats són geomètricament iguals i per tant les constants $K_3(\tilde{\Omega}(j, j+1))$ són iguals.

Aleshores, elevem al quadrat les desigualtats (3), (4), usant que

$$(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2,$$

i sumem totes les desigualtats obtingudes traient factor comú

$$K_3 (\tilde{\Omega} (j, j + 1)),$$

i queda

$$\begin{aligned} ||u||_{H^2(\Omega)^2}^2 \leq & 2 \max (K_3^2 (\tilde{\Omega} (-n, n)), K_3^2 (\tilde{\Omega} (j, j + 1))) \cdot (3 ||f||_{L_2(\Omega)^2}^2 + \\ & + 3 ||u||_{H^1(\Omega)^2}^2) \end{aligned}$$

ja que quasi tot punt de Ω està en almenys un dels conjunts $\Omega' (-n, n)$ o

$\Omega' (j, j + 1)$ i com a màxim en tres d'ells.

Això prova que $u \in H^2 (\Omega)^2$. Usant ara la desigualtat (1) i la de Poincaré concloem que

$$||u||_{H^2(\Omega)^2} \leq K ||f||_{L_2(\Omega)^2}$$

D'altra banda, com que $u \in H^2 (\Omega)^2$, tenim que $\Delta u \in L_2 (\Omega)^2$, i com que $\text{grad } p = f + \Delta u$, en deduïm que $\text{grad } p \in L_2 (\Omega)^2$.

2.9. TEOREMA

Sigui A l'operador $-P\Delta$, on Δ és l'operador de Laplace de dues components i P la projecció ortogonal de $L_2 (\Omega)^2$ en $J (\Omega)$. Considerem A , que en direm operador Stokes, com a operador de $J (\Omega)$ amb domini (dens) $D (A) = H^2 (\Omega)^2 \cap H (\Omega)$.

Aleshores, A és autoadjunt, afitat inferiorment i invertible.

Demostració

Donada $f \in J (\Omega)$, proposem-nos de trobar $u \in H (\Omega)$ tal que

$$(\nabla u, \nabla \phi)_{L_2(\Omega)^4} = (f, \phi)_{L_2(\Omega)^2} \quad \forall \phi \in H (\Omega).$$

Com que $\phi \rightarrow (f, \phi)_{L_2(\Omega)^2}$ és una forma lineal contínua sobre $H (\Omega)$, l'existència d'una solució única u , amb f donada, és assegurada pel Teorema de Riesz. Diguem $u = Bf$. A conseqüència de la Proposició 2.8, B és un operador continu de $J (\Omega)$ en $H^2 (\Omega)^2 \cap H (\Omega)$. La mateixa proposició ens assegura que $A \circ B$ és la identitat a $J (\Omega)$.

D'altra banda, si $u \in H^2(\Omega)^2 \cap H(\Omega)$, existeix $p \in L_2(\Omega)^2$ tal que $-\Delta u = Au + \text{grad } p$. Aleshores, per la definició de Δ en sentit distribuïdal hom té que $\forall \phi \in \mathring{J}(\Omega)$

$$(\nabla u, \nabla \phi)_{L_2(\Omega)^4} = (Au, \phi)_{L_2(\Omega)^2} \quad (1)$$

igualtat que s'estén per continuïtat a tota $\phi \in H(\Omega)$, i per tant $B \circ A$ és la identitat a $H^2(\Omega)^2 \cap H(\Omega)$.

Notem que, a fortiori, B és continu de $\mathring{J}$ en $\mathring{J}$. Per tant A té rang $\mathring{J}(\Omega)$ i és invertible amb continuïtat, i en conseqüència és tancat.

Usant (1) és evident que A és simètric, és a dir que, si

$$u, v \in D(A), \text{ aleshores } (Au, v)_{L_2(\Omega)^2} = (u, Av)_{L_2(\Omega)^2}.$$

Com que A és simètric, tancat i el seu rang és tot $\mathring{J}(\Omega)$, A és autoadjunt.

Vegem que A és afitat inferiorment. Si $u \in D(A)$ i $\|u\|_{L_2(\Omega)^2} = 1$ tenim:

$$(Au, u)_{L_2(\Omega)^2} = (\nabla u, \nabla u)_{L_2(\Omega)^4} \geq C^{-2} (u, u) = C^{-2}$$

on $C^{-2} \geq \frac{\pi^2}{4}$ és la constant definida a 1.4.

2.10. LEMA

Si $u \in H^2(\Omega)^2$, aleshores $u \in C_B^0(\Omega)^2$ (components contínues i afitades) i a més $|u(x, y)| \rightarrow 0$ si $|x| \rightarrow \infty$ uniformement en y .

Demostració

La primera part és conseqüència de les inclusions de Sobolev, car $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (vegem Adams (1975), p. 97).

Prenem

$$\Omega_n = \{ (x, y) \in \Omega \mid n-1 < x < n+1 \} \text{ per } n \in \mathbb{Z}.$$

Usant la mateixa inclusió de Sobolev tenim que

$$\sup_{(x,y) \in \Omega_n} |u(x,y)| \leq K_n \|u\|_{H^2(\Omega_n)^2} \quad (1)$$

Però com que per $|n|$ prou gran tots els Ω_n son geomètricament iguals, tenim que quan $|n| \rightarrow \infty$ la part de la dreta de la desigualtat (1) tendeix a zero, i per tant també ho ha de fer la part de l'esquerra.

2.11. TEOREMA

A Ω no es dona la Paradoxa de Stokes.

Demostració

D'acord amb el que hem dit a 1.4, donada $f \in L_2(\Omega)^2$ hem de trobar $u \in H^2(\Omega)^2 \cap H(\Omega)$ tal que

$$-\Delta u + \text{grad } p = f + R\Delta \vec{a}$$

D'acord amb com hem definit $\vec{a}$ tenim que $\Delta \vec{a} \in C_0^\infty(\Omega)^2$ i, en particular,

$$\Delta \vec{a} \in L_2(\Omega)^2.$$

Descomponem $f + R\Delta \vec{a} = g + \text{grad } p_1$ on $g \in \mathcal{J}(\Omega)$ i $\text{grad } p_1 \in G(\Omega)$. Pel teorema 2.9, que ens diu que A és invertible, existeix $u \in H^2(\Omega)^2 \cap H(\Omega)$ i $\text{grad } p_2 \in G(\Omega)$ tals que $-\Delta u + \text{grad } p_2 = g$ i per tant, dient $p = p_1 + p_2$,

$$-\Delta u + \text{grad } p = f + R\Delta \vec{a}.$$

Pel lema 2.10 sabem que $u(x,y) \rightarrow (0,0)$ quan $|x| \rightarrow \infty$ uniformement en y .

A més, pel teorema 2.9, u és única en aquestes condicions (tampoc no depèn de l'elecció de $\vec{a}$).

3. EL PROBLEMA ESTACIONARI

3.1. EL PROBLEMA

En aquest capítol demostrem l'existència d'almenys una solució estacionària de les equacions completes de Navier-Stokes per a qualsevol valor de R . Les solucions estacionàries trobades seran de la forma $R\vec{a} + u$ amb

$$u \in H^2(\Omega)^2 \cap H(\Omega),$$

igual que les solucions del problema de Stokes.

És interessant comparar aquest resultat amb els de Finn i Smith (1967) per al problema en un medi infinit. En primer lloc, en un medi infinit no s'obté existència més que per a valors prou petits de $|R|$, però a més si escrivim les solucions obtingudes en un medi infinit en la forma $(R, 0) + v(x, y)$, hom té que $v(x, y)$ no és de quadrat integrable (per $R \neq 0$, i almenys per $f = 0$). Això no és així en el nostre cas, per raó de la desigualtat de Poincaré, i podem obtenir un resultat d'unicitat amb $|R|$ prou petit usant essencialment estimacions a L_2 .

També ens interessa de comentar el treball d'Amick (1977). En aquest treball hom prova l'existència d'una solució generalitzada (en el sentit que definirem a 3.5) per al problema estacionari de Navier-Stokes en un conjunt de $\mathbb{R}^2$ que tingui la forma d'un canal excepte dins un compacte K (vegeu la fig. 4), però amb el fluid obligat a tendir (en cert sentit) al flux de Poiseuille (perfil de velocitats parabòlic) a l'infinit, i a transportar un cabal determinat. El que ens interessa destacar d'aquest problema, bastant similar al nostre, és que els resultats d'Amick només permeten d'obtenir existència de solució (generalitzada) per a nombres de Reynolds prou petits. En aquest sentit el nostre problema és més benèvol, i la diferència essencial és en els comportaments asimptòtics: en el cas d'Amick seria del tipus

$$(R(y^2 - 1), 0)$$

i en el nostre cas $(R, 0)$. El nostre cas té gradient zero i el cas d'Amick no. Això afecta les estimacions del Teorema 3.5.

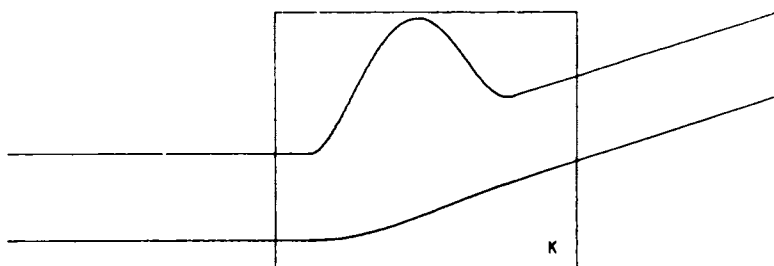


Fig. 4

Com ja hem dit, buscarem solucions estacionàries de la forma $R\vec{a} + u$ on $u \in H(\Omega)$ i compleix

$$\Delta u - \langle R\vec{a}, \nabla \rangle u - \langle u, \nabla \rangle R\vec{a} - \langle u, \nabla \rangle u = \text{grad } p + g$$

on diem $g = -f - R\Delta\vec{a} + R^2 \langle \vec{a}, \nabla \rangle \vec{a}$. Per tal com escollim $\vec{a}$ tenim que $g \in L_2(\Omega)^2$ si $f \in L_2(\Omega)^2$.

Per a obtenir les estimacions que necessitem caldrà escollir, entre els camps $\vec{a}$ possibles, un que tingui certes propietats. Si l'expressem en la forma $\vec{a}(x, y) = (1, 0) - \vec{b}(x, y)$, aquestes propietats ens són donades pel lema següent.

3.2. LEMA

Suposem ∂S de classe C^2 . Donat $\varepsilon > 0$, existeixen $\rho(\varepsilon) > 0$ i un camp de vectors $\vec{b}(x, y)$ tals que

- i) $\vec{b} \in C^\infty(\Omega)^2$ i $\text{div } \vec{b} = 0$
- ii) $\vec{b} = (1, 0)$ en un entorn de ∂S
 $\vec{b} = (0, 0)$ en un entorn de ∂Q
- iii) Suport de $\vec{b} \subset \{(x, y) \in \Omega \mid \text{dist}\{(x, y), \partial S\} < \rho(\varepsilon)\}$
- iv) $\rho(\varepsilon) \rightarrow 0$ si $\varepsilon \rightarrow 0$
- v) $\forall \phi \in H(\Omega) \mid \int \phi^T (\nabla \vec{b}) \phi \, dx \, dy \mid \leq \varepsilon \|\nabla \phi\|_{L_2(\Omega)^4}^2$

Demostració

És un resultat prou conegut i molt utilitzat. Per a la demostració vegeu, per exemple, Ladyzhenskaya (1969), p. 127, o Temam (1977), p. 174.

3.3. TEOREMA

Per cada $n \in \mathbb{N}$ considerem un obert de classe $\mathcal{C}^2$, Ω_n , de manera que $\{(x, y) \in \Omega \mid |x| < n\} \subset \Omega_n \subset \{(x, y) \in \Omega \mid |x| < n+1\}$. Considerem també $\vec{a}(x, y) = (1, 0) - \vec{b}(x, y)$, on $\vec{b}$ és un camp qualsevol dels donats pel Lema 3.2. Fixem també $R \in \mathbb{R}$.

Per cada Ω_n existeix un $u^{(n)} \in H^2(\Omega_n)^2 \cap H(\Omega_n)$, i $p_n \in H^1(\Omega_n)$ tals que

$$\Delta u^{(n)} - \langle R\vec{a}, \nabla \rangle u^{(n)} - \langle u^{(n)}, \nabla \rangle R\vec{a} - \langle u^{(n)}, \nabla \rangle u^{(n)} = \text{grad } p_n + g$$

on $\vec{a}$ i g s'entenen restringits a Ω_n .

Demostració

Aquest és el resultat clàssic d'existència de solucions estacionàries amb condicions de frontera no homogènies per a dominis afitats. Per a la demostració, vegeu Ladyzhenskaya (1969), p. 121 per a l'existència de la solució (generalitzada) a $H(\Omega_n)$, i p. 136 per a la regularitat ($u^{(n)} \in H^2(\Omega_n)^2$).

En la demostració, Ladyzhenskaya (1969) empra el Teorema de punt fix de Leray-Schauder. Una altra demostració usant aproximacions de Galerkin i el Teorema del punt fix de Brouwer pot trobar-se a Temam (1977), p. 173.

3.4. LEMA

Sigui Ω' un obert contingut a Ω i $u \in L_\infty(\Omega')^2$ amb $\text{div } u = 0$ (en sentit distribucional). Aleshores, l'aplicació $B: H(\Omega')^2 \rightarrow \mathbb{R}$, donada per

$$B(v, w) = (\langle u, \nabla \rangle v, w)_{L_2(\Omega)^2} = \sum_{i,j} \int_{\Omega'} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \, dx \, dy,$$

és contínua i $B(v, v) = 0 \quad \forall v \in H(\Omega')$.

Demostració

B és bilineal, i per tant n'hi ha prou amb veure que és afitada per a veure que és contínua.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx dy \right| &\leq \|u_i\|_{L_{\infty}(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega')} \|w_j\|_{L_2(\Omega')} \leq \\ &\leq \frac{2}{\pi} \|u_i\|_{L_{\infty}(\Omega)} \|v\|_{H(\Omega')} \|w\|_{H(\Omega')}. \end{aligned}$$

Ara, com que B és contínua a $H(\Omega')$, n'hi ha prou de comprovar la igualtat $B(v, v) = 0$ per $v \in \dot{J}(\Omega')$:

$$\sum_{i,j} \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} v_j dx dy = \sum_j \frac{1}{2} \langle u, \text{grad } v_j^2 \rangle = 0$$

car la divergència distribucional de u és zero i $v_j^2 \in C_0^{\infty}(\Omega')$.

3.5. TEOREMA

Existeix almenys una $u \in H^2(\Omega)^2 \cap H(\Omega)$ i p tal que $\text{grad } p \in G(\Omega)$, que compleixen

$$\Delta u - \langle R\vec{a} + u, \nabla \rangle u - \langle u, \nabla \rangle R\vec{a} = \text{grad } p + g \quad (1)$$

Demostració

Recordem que tenim llibertat en l'elecció de $\vec{a}$. Prenem $\vec{a} = (1, 0) - \vec{b}$, on $\vec{b}$ l'escollim d'acord amb el lema 3.2 amb $\varepsilon < |\vec{R}|^{-1}$.

Considerem les solucions $u^{(n)}$ donades pel Teorema 3.3. Prenguem a l'equació (1) de 3.3 producte escalar a $L_2(\Omega_n)^2$ amb $\phi \in \dot{J}(\Omega_n)$ i ens queda que

$$\begin{aligned} - (u^{(n)}, \phi)_{H(\Omega_n)} - \int_{\Omega_n} \phi^T (\nabla u^{(n)}) R\vec{a} - \int_{\Omega_n} \phi^T (\nabla R\vec{a}) u^{(n)} - \\ - \int_{\Omega_n} \phi^T (\nabla u^{(n)}) u^{(n)} = (g, \phi)_{L_2(\Omega_n)^2} \quad \forall \phi \in \dot{J}(\Omega_n) \end{aligned} \quad (2)$$

D'altra banda prenguem a la mateixa equació producte escalar a $L_2(\Omega_n)^2$ amb $u^{(n)}$. Ens dóna, usant el lema 3.4 (car $H^2(\Omega_n) \subset L_\infty(\Omega_n)$):

$$-\|u^{(n)}\|_{\dot{H}(\Omega_n)}^2 - R \int_{\Omega_n} u^{(n)T} (\nabla \vec{a}) u^{(n)} = (g, u^{(n)})_{L_2(\Omega_n)^2}$$

Usem ara que $\nabla a = -\nabla b$, la propietat v) del lema 3.2, la desigualtat de Schwarz i la de Poincaré:

$$\|u^{(n)}\|_{\dot{H}(\Omega_n)}^2 \leq |R| \varepsilon \|u^{(n)}\|_{\dot{H}(\Omega_n)}^2 + \|g\|_{L_2(\Omega_n)^2} \cdot \frac{2}{\pi} \|u^{(n)}\|_{H(\Omega_n)}$$

Com que $|R| \varepsilon < 1$, prenem $\delta > 0$ de manera que $\delta < 1 - |R| \varepsilon$, i usem la desigualtat numèrica

$$ab \leq \delta a^2 + \frac{1}{4\delta} b^2;$$

$$\|u^{(n)}\|_{\dot{H}(\Omega_n)}^2 \leq |R| \varepsilon \|u^{(n)}\|_{\dot{H}(\Omega_n)}^2 + \delta \|u^{(n)}\|_{\dot{H}(\Omega_n)}^2 + \frac{1}{\partial \pi^2} \|g\|_{L_2(\Omega_n)^2}^2$$

$$\|u^{(n)}\|_{\dot{H}(\Omega_n)}^2 \leq \frac{1}{\partial \pi^2} \|g\|_{L_2(\Omega_n)}^2 \cdot (1 - |R| \varepsilon - \delta)^{-1}$$

ja que $1 - |R| \varepsilon - \delta > 0$.

Si estenem les $u^{(n)}$ per zero fora de Ω_n tenim que $u^{(n)} \in H(\Omega)$, i la desigualtat anterior ens diu que les $u^{(n)}$ estan uniformement afitades respecte a n dins $H(\Omega)$. Per tant existeix $u \in H(\Omega)$, límit dèbil d'una subsuccessió de $u^{(n)}$, que en direm també $u^{(n)}$, tal que

- i) $\nabla u^{(n)}$ convergeix a ∇u dèbilment a $L^2(\Omega)^4$.
- ii) $u^{(n)}$ convergeix a u dèbilment a $L_2(\Omega)^2$.
- iii) $\forall i \in \mathbb{N}$, $u^{(n)}$ convergeix a u fortament a $L_2(\Omega_i)^2$.

El poder assegurar iii) ve del fet que la restricció de $H^1(\Omega)$ en $L_2(\Omega_i)$ és compacta.

Donada ara $\phi \in J(\Omega)$, per n prou gran serà $\phi \in J(\Omega_n)$ i valdrà la igualtat (2). Prenguem límits a (2) quan $n \rightarrow \infty$:

$$(u^{(n)}, \phi)_{H(\Omega_n)} \quad i \quad \int_{\Omega_n} \phi^T (\nabla u^{(n)}) R \vec{a}$$

tendeixen, respectivament, a

$$(u, \phi)_{H(\Omega)} \text{ i } a \int_{\Omega} \phi^T (\nabla u) R \vec{a}$$

quan $n \rightarrow \infty$, a causa de i). Les expressions

$$\int_{\Omega_n} \phi^T (\nabla R a) u^{(n)} \text{ i } (g, \phi)_{L_2(\Omega_n)^2}$$

tendeixen, respectivament a

$$\int_{\Omega} \phi^T (\nabla R a) u \text{ i } (g, \phi)_{L_2(\Omega)^2}$$

Per a calcular el límit de

$$\int_{\Omega_n} \phi^T (\nabla u^{(n)}) u^{(n)}$$

notem que per a tota $v \in H(\Omega)$ i tota $\phi \in \mathcal{J}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \phi^T (\nabla v) v = - \int_{\Omega} v^T (\nabla \phi) v.$$

Hom prova això, primer, per $v \in \mathcal{J}(\Omega)$ (usant $\operatorname{div} v = 0$) i després veient que amb ϕ fixada tots dos membres de la igualtat són continus en v en la topologia de $H(\Omega)$. Sigui ara $i \in \mathbb{N}$ de manera que $\sup \phi \subset \Omega_n$ per $n \geq i$: tenim que com a conseqüència de iii) $u^{(n)} \cdot u^{(n)T}$ tendeix a $u \cdot u^T$ fortament a $L_1(\Omega_i)^4$ i per tant

$$\int_{\Omega_n} \phi^T (\nabla u^{(n)}) u^{(n)} = - \int_{\Omega_i} u^{(n)T} (\nabla \phi) u^{(n)} \rightarrow - \int_{\Omega_i} u^T (\nabla \phi) u = \int_{\Omega} \phi^T (\nabla u) u.$$

En conseqüència u compleix $\forall \phi \in \mathcal{J}(\Omega)$:

$$-(u, \phi)_{H(\Omega)} - \int_{\Omega} \phi^T (\nabla u) R \vec{a} - \int_{\Omega} \phi^T (\nabla R \vec{a}) u - \int_{\Omega} \phi^T (\nabla u) u = (g, \phi)_{L_2(\Omega)^2}$$

Això és el que s'entén per solució generalitzada de (1). Notem que d'acord amb la Proposició 2.8 sobre el problema de Stokes, n'hi hauria prou amb veure que $g + \langle R \vec{a}, \nabla \rangle u + \langle u, \nabla \rangle R \vec{a} + \langle u, \nabla \rangle u$ pertany a $L_2(\Omega)^2$ per a concloure que $u \in H^2(\Omega)$ i que u compleix (1) en sentit fort. D'aquesta suma, l'únic terme del qual no sabem de moment que estigui a $L_2(\Omega)^2$ és $\langle u, \nabla \rangle u$. Els altres no presenten problemes car

$$\vec{a} \in L_{\infty}(\Omega)^2, u \in L_2(\Omega)^2, \nabla u \in L_2(\Omega)^4 \text{ i } g \in L_2(\Omega)^2.$$

Per a veure que $\langle u, \nabla \rangle u \in L_2(\Omega)^2$ n'hi hauria prou amb demostrar que $u \in L_{\infty}(\Omega)^2$. Això és el que ara farem.

Com a conseqüència d'un important resultat de regularitat interior de Ladyzhenskaya (1969), p. 131, si Ω' és un obert afinitat amb la seva clausura continguda a Ω , del fet que u sigui solució generalitzada de (1) hom dedueix que $u \in H^2(\Omega')^2$, $p \in H^1(\Omega')$ i la igualtat (1) es compleix a Ω' en sentit fort.

Sigui $v^{(1)}$ la solució de

$$-\Delta v^{(1)} + \text{grad } p_1 = -g - \langle R\vec{a}, \nabla \rangle u - \langle u, \nabla \rangle R\vec{a}$$

que pel Teorema 2.11 sabem que existeix, car el segon membre de la igualtat és a $L_2(\Omega)^2$, i a més $v^{(1)} \in H^2(\Omega)^2 \cap H(\Omega)$. Pel lema 2.10 sabem que

$$v^{(1)} \in L_\infty(\Omega)^2.$$

Considerem $v = u - v^{(1)}$, $q = p - p_1$. Es compleix que a cada Ω' estrictament contingut a Ω , $v \in H^2(\Omega')^2$, $\text{div } v = 0$, $q \in H^1(\Omega')$, i a més es verifica

$$\Delta v - \text{grad } q = \langle u, \nabla \rangle u$$

Haurem conclòs quan demostrem que $v \in L_\infty(\Omega)^2$, car $u = v + v^{(1)}$. De moment sabem també que $v \in H(\Omega)$.

Considerem la solució fonamental de les equacions de Stokes a $\mathbb{R}^2$ (Ladyzhenskaya (1969), p. 67):

$$V_i^j(\xi, \eta) = \frac{-1}{4\pi} \left[\delta_{ij} \ln \frac{1}{|\xi - \eta|} + \frac{(\xi_i - \eta_i)(\xi_j - \eta_j)}{|\xi - \eta|^2} \right] \quad i, j = 1, 2$$

$$Q^j(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \ln \frac{1}{|\xi - \eta|} \quad j = 1, 2$$

on $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ són punts de $\mathbb{R}^2$, i δ_{ij} és la de Kroeneker.

Es compleix que

$$\Delta_\eta V_i^j + \frac{\partial Q^j}{\partial \eta_i} = \delta_{ij} \delta(\xi - \eta) \quad \text{per } i, j = 1, 2$$

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial V_i^j}{\partial \eta_i} = 0 \quad \text{per } j = 1, 2$$

on $\delta(\xi - \eta)$ és la de Dirac a $\xi - \eta$.

Considerem també les funcions, per $T > 0$,

$$\bar{V}_i^j(\xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \left[\delta_{ij} \left(\ln \frac{1}{T} - \frac{3}{2T^2} |\xi - \eta|^2 + \frac{3}{2} \right) + \frac{(\xi_i - \eta_i)(\xi_j - \eta_j)}{T^2} \right]$$

$$\bar{Q}^j(\xi, \eta) = \frac{-1}{\pi} \frac{1}{T^2} (\xi_j - \eta_j), \quad j = 1, 2$$

Aquestes ens serviran per a modificar les condicions de frontera de la primera. Considerem $W_i^j = V_i^j + \bar{V}_i^j$, $P^j = Q^j + \bar{Q}^j$. Compleixen:

$$\Delta_\eta W_i^j + \frac{\partial P^j}{\partial \eta_i} = \delta_{ij} \delta(\xi - \eta), \quad i, j = 1, 2$$

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial W_i^j}{\partial \eta_i} = 0, \quad j = 1, 2$$

$$W_i^j(\xi, \eta) = 0 \quad \text{si} \quad |\xi - \eta| = T$$

També és fàcil de veure que existeix una constant K independent de T , per $T \leq 1$, tal que es compleix

$$|W_i^j(\xi, \eta)| \leq K(1 - \ln |\xi - \eta|) \quad \text{per} \quad |\xi - \eta| \leq T, \quad i, j = 1, 2 \quad (3)$$

$$|P^j(\xi, \eta)| \leq K/T \quad \text{per} \quad |\xi - \eta| = T, \quad j = 1, 2 \quad (4)$$

$$\left| \frac{\partial W_i^j(\xi, \eta)}{\partial \eta_k} \right| \leq K/T \quad \text{per} \quad |\xi - \eta| = T, \quad i, j, k = 1, 2 \quad (5)$$

$$\text{Definim ara el Tensor } T_{ik}^*(W^j) = \delta_{ik} P^j + \left(\frac{\partial W_i^j}{\partial \eta_k} + \frac{\partial W_k^j}{\partial \eta_i} \right).$$

Com que $W_i^j(\xi, \eta) = 0$ si $|\xi - \eta| = T$, les fórmules de Green per a l'operador de Stokes (Ladyzhenskaya (1969), p. 139) donen que, per a qualsevol camp solenoïdal $\phi(\eta)$ i qualsevol funció $h(\eta)$ prou diferenciables a $|\xi - \eta| \leq T$, es compleix que

$$\phi_j(\xi) = \int_{|\xi - \eta| \leq T} \sum_{i=1}^2 W_i^j(\xi, \eta) \left(\Delta \phi_i - \frac{\partial h}{\partial \eta_i} \right) d\eta +$$

$$+ \int_{|\xi - \eta| = T} \sum_{i, k=1}^2 T_{i,k}'(W^i) \phi_i n_k dS_\eta$$

on $\vec{n} = (n_1, n_2)$ és la normal exterior unitària a la frontera de $|\xi - \eta| \leq T$.

Aquesta fórmula s'estén a tota $\phi \in H^2(|\xi - \eta| < T)^2$, $\text{div } \phi = 0$, i $h \in H^1(|\xi - \eta| < T)$ perquè tots dos membres de la igualtat són continus: el primer per la inclusió de Sobolev $H^2 \hookrightarrow C^0$, i el segon perquè

$$W_i^j \in L_2(|\xi - \eta| < T),$$

quant a la primera integral, i perquè les traces dels elements de

$$H^2(|\xi - \eta| < T)$$

estan a $H^{3/2}(|\xi - \eta| = T)$ (Lions i Magenes (1968), p. 44) per a la segona integral.

Si apliquem aquesta fórmula a v i q , tenim que, per $\xi \in \Omega$

$$\begin{aligned} v_j(\xi) = & \int_{|\xi - \eta| \leq T} \sum_{i=1}^2 W_i^j \langle u, \nabla \rangle u_i d\eta + \\ & + \int_{|\xi - \eta| = T} \sum_{i, k=1}^2 T_{i,k}'(W^i) v_i n_k dS_\eta \end{aligned}$$

mentre hàgim pres $T \leq d(\xi)$, on $d(\xi) = \text{dist}(\xi, \partial\Omega)$ ($d(\xi) \leq 1$).

Emprant les desigualtats (3), (4) i (5), per la desigualtat de Schwarz tenim:

$$\begin{aligned} |v_j(\xi)| \leq & K \int_{|\xi - \eta| \leq T} \sum_{i, l=1}^2 \left| u_l \frac{\partial u_i}{\partial \eta_l} \right| (1 - \ln |\xi - \eta|) d\eta + \\ & + \frac{5K}{T} \int_{|\xi - \eta| = T} (|v_1| + |v_2|) dS_\eta \leq \\ \leq & K \sum_{i, l=1}^2 \left[\int_{|\xi - \eta| \leq T} u_l^2 (1 - \ln |\xi - \eta|)^2 d\eta \right]^{1/2} \\ & \left[\int_{|\xi - \eta| \leq T} \left| \frac{\partial u_i}{\partial \eta_l} \right|^2 d\eta \right]^{1/2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{5K}{T} \int_{|\xi-\eta|=T} (|v_1| + |v_2|) dS_\eta \leq \\
& \leq K_1 \sum_{i,l=1}^2 \left[\int_{|\xi-\eta| \leq T} \left| \frac{\partial u_i}{\partial \eta_l} \right|^2 d\eta \right]^{1/2} + \\
& + \frac{5K}{T} \int_{|\xi-\eta|=T} (|v_1| + |v_2|) dS_\eta
\end{aligned}$$

i la darrera desigualtat és certa amb K_1 independent de $T \leq 1$, ço que hom veu usant de nou la desigualtat de Schwarz i

$$\begin{aligned}
& \int_{|\xi-\eta| \leq T} u_1^4 d\eta \leq \int_{\mathbb{R}^2} u_1^4 d\eta < \infty, \quad \text{ja que } H(\Omega) \subset L_4(\Omega)^2 \\
& \int_{|\xi-\eta| \leq T} (1 - \ln |\xi-\eta|)^2 d\eta \leq \int_{|\xi-\eta| \leq 1} (1 - \ln |\xi-\eta|)^2 d\eta = \\
& = 2\pi \int_0^1 (1 - \ln r)^2 r dr < +\infty
\end{aligned}$$

Prenguem ara $K_2 = \max \{ K_1, 5K \}$ i integrem la darrera desigualtat obtinguda respecte a T entre $d(\xi)/4$ i $3d(\xi)/4$. La desigualtat és vàlida en aquest rang, car K_2 no depèn de T si $T \leq 1$. Direm d en lloc de $d(\xi)$. Obtenim:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{2} \cdot |v_i(\xi)| & \leq \frac{d}{2} K_2 \sum_{i,l=1}^2 \left[\int_{|\xi-\eta| \leq \frac{3d}{4}} \left| \frac{\partial u_i}{\partial \eta_l} \right|^2 d\eta \right]^{1/2} + \\
& + \frac{4}{d} K_2 \int_{|\xi-\eta| \leq \frac{3d}{4}} (|v_1| + |v_2|) d\eta \leq \\
& \leq d K_2 \left[\int_{|\xi-\eta| \leq \frac{3d}{4}} (\nabla u)^2 d\eta \right]^{1/2} + \\
& + \frac{4K_2}{d} \left(\pi \frac{9d^2}{16} \right)^{1/2} \sum_{i=1}^2 \left[\int_{|\xi-\eta| \leq \frac{3d}{4}} |v_i|^2 d\eta \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

on a la darrera desigualtat hem usat, per al primer terme, la desigualtat numèrica $(a + b + c + d) \leq 2 \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$, i per al segon terme la de Schwarz.

En conseqüència, ens queda:

$$|v_j(\xi)| \leq 2 K_2 \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)^4} + \frac{12 K_2 \sqrt{\pi}}{d} \|v\|_{L_2\left(|\xi-\eta| \leq \frac{3d}{4}\right)}$$

Però el conjunt $|\xi - \eta| \leq 3d/4$ es troba tot ell a una distància de $\partial\Omega$ inferior o igual a $7d(\xi)/4$ i val la desigualtat següent (del tipus de Poincaré), car $v \in H(\Omega)$ i s'anul·la a $\partial\Omega$:

$$\|v\|_{L_2\left(|\xi-\eta| \leq \frac{3d(\xi)}{4}\right)}^2 \leq K_3 \frac{7}{4} d(\xi) \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)^4}^2$$

per K_3 independent de d (i de $v \in H(\Omega)$). Aquesta desigualtat es prova fàcilment, com a Ladyzhenskaya (1969), pp. 123-124, o a Heywood (1976), p. 90, usant fortament la gran homogeneïtat de les components no afitades de $\partial\Omega$.

Finalment, doncs,

$$|v_j(\xi)| \leq 2 K_2 \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)^4} + 21 K_2 K_3 \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)^4}$$

i en concloem que $v \in L_\infty(\Omega)^2 \Rightarrow u \in H^2(\Omega)$ i u compleix (1) en sentit fort.

3.6. COROL·LARI

Les solucions obtingudes al Teorema 3.5, de la forma $R\vec{a} + u$, són contínues a Ω i tendeixen uniformement, respecte a y , a $(R, 0)$ quan $|x| \rightarrow \infty$.

Demostració

Hem vist que $u \in H^2(\Omega)^2 \cap H(\Omega)$. No hem de fer sinó aplicar el lema 2.10 a u .

3.7. PROPOSICIÓ

Sigui $\vec{b}$ (x, y) un camp com els donats pel lema 3.2, i sigui

$$\vec{a} = (1, 0) - \vec{b}.$$

Siguin $\varepsilon(\vec{b})$, $C_1(\vec{b})$, $C_2(\vec{b})$ constants positives de manera que

$$\left| \int_{\Omega} u^T (\nabla \vec{b}) u \right| \leq \varepsilon(\vec{b}) \|u\|_{H(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H(\Omega), \quad C_1(\vec{b}) \geq \|\Delta \vec{b}\|_{L_2(\Omega)^2},$$

$$C_2(\vec{b}) \geq \|P < \vec{a}, \nabla > \vec{b}\|_{L_2(\Omega)^2},$$

on P és la projecció ortogonal de $L_2(\Omega)^2$ en $J(\Omega)$. Suposem que

$$\varepsilon(\vec{b}) < |R|^{-1} \quad \text{i que } u \in H^2(\Omega) \cap H(\Omega)$$

sigui una solució de (1) de 3.5 amb R i f donats. Aleshores

$$\|u\|_{H(\Omega)} \leq C(\|f\| + |R| C_1(\vec{b}) + R^2 C_2(\vec{b})) / (1 - |R| \varepsilon(\vec{b}))$$

on C és la constant de la desigualtat de Poincaré a $H(\Omega)$ definida a 1.4.

Demostració

U compleix

$$\Delta u - < (R\vec{a} + u), \nabla > u - < u, \nabla > R\vec{a} = \text{grad } p - f -$$

$$- R\Delta\vec{a} + R^2 < \vec{a}, \nabla > \vec{a}.$$

Prenguem producte escalar de $L_2(\Omega)^2$ amb u en aquesta igualtat. Notem que $\nabla\vec{a} = -\nabla\vec{b}$, $\Delta\vec{a} = -\Delta\vec{b}$ i que $\Delta\vec{b} \in J(\Omega)$. Usant el Lema 3.4, queda

$$- \|u\|_{H(\Omega)}^2 + R \int_{\Omega} u^T (\nabla \vec{b}) u = - (f, u)_{L_2(\Omega)^2} +$$

$$+ R (\Delta \vec{b}, u)_{L_2(\Omega)^2} - R^2 (< \vec{a}, \nabla > \vec{b}, u)_{L_2(\Omega)^2}$$

$$\|u\|_{H(\Omega)}^2 \leq |R| \varepsilon(\vec{b}) \|u\|_{H(\Omega)}^2 + C(\|f\|_{L_2(\Omega)^2} +$$

$$+ |R| C_1(\vec{b}) + R^2 C_2(\vec{b})) \|u\|_{H(\Omega)}$$

$$\|u\|_{H(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L_2(\Omega)^2} + |R| C_1(\vec{b}) + R^2 C_2(\vec{b})) / (1 - |R| \varepsilon(\vec{b}))$$

3.8. TEOREMA

Si existeix $\vec{b}$ (x, y) com al lema 3.2 tal que

$$2\sqrt{2}C^2(\|f\|_{L_2(\Omega)^2} + |R|C_1(\vec{b}) + R^2C_2(\vec{b})) + 2|R|\varepsilon(\vec{b}) - R^2\varepsilon(\vec{b})^2 < 1 \quad (1)$$

$$|R|\varepsilon(\vec{b}) < 1 \quad (2)$$

on C , $C_1(\vec{b})$, $C_2(\vec{b})$, $\varepsilon(\vec{b})$ són les constants definides a la Proposició 3.7, aleshores la solució donada pel Teorema 3.5 és única.

Demostració

Suposem que $R\vec{a} + u$ i $R\vec{a} + u + v$ per $u, v \in H^2(\Omega)^2 \cap H(\Omega)$ siguin solucions de (1) de 3.5. Vegem que $v = 0$.

Restant les igualtats

$$\begin{aligned} \Delta(u + v) - \langle (R\vec{a} + u + v), \nabla \rangle &= \langle u + v, \nabla \rangle R\vec{a} = \text{grad } q + g \\ \Delta u - \langle (R\vec{a} + u), \nabla \rangle &= \langle u, \nabla \rangle R\vec{a} = \text{grad } p + g \end{aligned}$$

obtenim:

$$\Delta v - \langle (R\vec{a} + u + v), \nabla \rangle v - \langle v, \nabla \rangle u - \langle v, \nabla \rangle R\vec{a} = \text{grad } (q - p)$$

Prenent ara producte escalar a $L_2(\Omega)^2$ amb v a totes dues bandes de la igualtat i usant el Lema 3.4:

$$-\|v\|_{H(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} v^T (\nabla u) v + R \int_{\Omega} v^T (\nabla \vec{b}) v = 0 \quad (3)$$

Però notem que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} v^T (\nabla u) v \right| &= |(\nabla u, v v^T)_{L_2(\Omega)^4}| \leq \|u\|_{H(\Omega)} \|v v^T\|_{L_2(\Omega)^4} \leq \\ &\leq \|u\|_{H(\Omega)} \sqrt{2} \|v\|_{L_2(\Omega)^2}^2 \leq \|u\|_{H(\Omega)} 2\sqrt{2} \|v\|_{L_2(\Omega)^2} \|v\|_{H(\Omega)} \leq \\ &\leq 2\sqrt{2}C \|u\|_{H(\Omega)} \|v\|_{H(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

on hem usat les desigualtats d'1.4.

D'altra banda, a causa de (2) val la Proposició 3.7 i tenim que

$$\|u\|_{H(\Omega)} \leq C (\|f\|_{L_2(\Omega)^2} + |R| C_1(\vec{b}) + R^2 C_2(\vec{b})) / (1 - |R| \varepsilon(\vec{b}))$$

d'on es dedueix que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} v^T (\nabla u) v \right| + |R| \left| \int_{\Omega} v^T (\nabla \vec{b}) v \right| \leq \\ & \leq 2\sqrt{2} C^2 \frac{\|f\|_{L_2(\Omega)^2} + |R| C_1(\vec{b}) + R^2 C_2(\vec{b})}{1 - |R| \varepsilon(\vec{b})} \|v\|_{H(\Omega)}^2 + |R| \varepsilon(\vec{b}) \|v\|_{H(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

o sigui que

$$\begin{aligned} & \left| - \int_{\Omega} v^T (\nabla u) v + R \int_{\Omega} v^T (\nabla \vec{b}) v \right| \leq \\ & \leq [2\sqrt{2} C^2 \frac{\|f\|_{L_2(\Omega)^2} + |R| C_1(\vec{b}) + R^2 C_2(\vec{b})}{1 - |R| \varepsilon(\vec{b})} + |R| \varepsilon(\vec{b})] \|v\|_{H(\Omega)}^2 \quad (4) \end{aligned}$$

La desigualtat (4), juntament amb la igualtat (3), impliquen

$$\|v\|_{H(\Omega)}^2 = 0$$

si es compleix que el que hi ha dins els parèntesis quadrats de (4) és estrictament menor que 1. Usant (2) això es compleix si es compleix (1).

3.9. COROL·LARI

En cas que $2\sqrt{2} C^2 \|f\|_{L_2(\Omega)^2} < 1$ (en particular, quan $f = 0$), la solució estacionària és única si $|R|$ és prou petit.

Demostració

D'acord amb el Lema 3.2, escollim $\vec{b}$ tal que $\varepsilon(\vec{b}) < 1$. Com que $C_1(\vec{b})$, $C_2(\vec{b})$ sempre són finites, les desigualtats (1) i (2) de 3.8 es compliran amb $|R|$ prou petit.

4. EL PROBLEMA DE VALOR INICIAL

4.1. EL PROBLEMA

Buscarem les solucions del problema de valor inicial de la forma

$$V(x, y, t) = R\vec{a}(x, y) + v(t) \text{ amb } v(t) \in H^2(\Omega)^2 \cap H(\Omega).$$

En conseqüència, la condició inicial haurà d'ésser de la forma $R\vec{a} + v_0$, bé que v_0 podrà ésser presa en un espai més ampli que $H^2(\Omega)^2 \cap H(\Omega)$.

L'equació que ha de complir $v(t)$ és

$$v_t - \Delta v + \text{grad } p = -\langle R\vec{a}, \nabla \rangle v - \langle v, \nabla \rangle R\vec{a} - \langle v, \nabla \rangle v - g \quad (1)$$

on $g = -f - R\Delta\vec{a} + R^2\langle\vec{a}, \nabla\rangle\vec{a}$, com al capítol anterior, on la pressió p , en general, depèn del temps, i on $v_t(t)$ és la derivada de $v(t)$ respecte a t quan ens mirem $v(t)$ com una corba de $\mathring{J}(\Omega)$. Això vol dir que demanem que

$$\frac{d}{dt} v(t) \in \mathring{J}(\Omega),$$

i per tant si apliquem la projecció ortogonal $P: L_2(\Omega)^2 \rightarrow \mathring{J}(\Omega)$ a totes dues bandes de (1) ens queda

$$\frac{d}{dt} v(t) + A v(t) = F(v(t)) \quad (2)$$

on $A = -P\Delta$ és l'operador de Stokes, i

$$F(v) = P[-\langle R\vec{a}, \nabla \rangle v - \langle v, \nabla \rangle R\vec{a} - \langle v, \nabla \rangle v - g].$$

L'equació (2) junt amb la condició inicial

$$v(0) = v_0 \quad (3)$$

constitueixen un problema de valor inicial de tipus semilineal que veurem que és del tipus dels estudiats al llibre de Henry (1981), al qual farem contínua referència en aquest capítol i del qual adoptarem la terminologia. Un altre enfocament possible, amb petites diferències, és el donat a Iooss (1973). Vegeu també X. Mora (1981).

4.2. OPERADORS SECTORIALS

Direm que un operador lineal A en un espai de Banach X és un operador sectorial si és tancat, definit densament, i tal que per a algun $\theta \in (0, \pi/2)$, algun $M \geq 1$ i algun nombre real a , el sector

$$S_{a,\theta} = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \theta \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a \}$$

és inclòs en el conjunt resolvent de A , $\rho(A)$, i a més

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq M / |\lambda - a|$$

per tot $\lambda \in S_{a,\theta}$.

És fàcil de veure que si X és un espai de Hilbert i A és autoadjunt i afinitat inferiorment, aleshores A és sectorial.

Si A és sectorial i la part real dels punts de l'espectre de A és estrictament positiva, $\operatorname{Re}(\sigma(A)) > 0$, hom pot definir els operadors A^α per $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$ amb les propietats següents:

- i) A^α és tancat amb domini $D(A^\alpha)$ dens a X .
- ii) Si per $x \in D(A^\alpha)$ definim $\|x\|_\alpha = \|A^\alpha x\|_X$, els $D(A^\alpha)$ són espais de Banach, i per $\alpha > \beta$ es compleix la inclusió $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$ que resulta contínua i densa.
- iii) $A^0 = I$ (identitat a X), $A^1 = A$.
- iv) Per $\alpha, \beta \geq 0$, $A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha = A^{\alpha+\beta}$ a $D(A^{\alpha+\beta})$.
- v) Si X és un espai de Hilbert i A és autoadjunt i definit positiu, també ho són els A^α per tot $\alpha \geq 0$.

(Per a la demostració de tot això, vegeu Henry (1981), pp. 18 i ss.)

4.3. LEMA

Com a conseqüència del que acabem de dir i del Teorema 2.9, l'operador de Stokes $A = -P \Delta$ és un operador sectorial a $X = \mathring{J}(\Omega)$ amb domini $D(A) = H^2(\Omega)^2 \cap H(\Omega)$, que pel fet d'ésser autoadjunt i positiu admet potències A^α amb les propietats citades. En particular:

Lema

$$D(A^{1/2}) = H(\Omega).$$

Demostració

Com a conseqüència de ii) de 4.2, $D(A^{1/2})$ és la clausura de $D(A) = H^2(\Omega)^2 \cap H(\Omega)$ amb la norma $\|\phi\|_{1/2} = \|A^{1/2} \phi\|_{\mathring{J}(\Omega)}$.

Si $\phi \in D(A)$, tenim

$$\|\phi\|_{1/2}^2 = (A^{1/2} \phi, A^{1/2} \phi)_{L_2(\Omega)^2} = (A\phi, \phi)_{L_2(\Omega)^2} = (\nabla \phi, \nabla \phi)_{L_2(\Omega)^4} = \|\phi\|_{H(\Omega)}^2$$

En aquestes igualtats hem usat que si $\phi \in D(A)$, aleshores

$$A^{1/2} \phi \in D(A^{1/2})$$

(conseqüència de la propietat iv) de 4.2) i que $A^{1/2}$ és autoadjunt, car A ho és.

Per tant $D(A^{1/2})$ és la clausura de $H^2(\Omega)^2 \cap H(\Omega)$ amb la norma de $H(\Omega)$, o sigui que $D(A^{1/2}) = H(\Omega)$.

4.4. LEMA

Si A és l'operador de Stokes a $\mathring{J}(\Omega)$ i $1/2 < \alpha \leq 1$, aleshores $D(A^\alpha)$ està inclòs contínuament a $C_B^0(\Omega)^2$ (camps continus i afitats a Ω).

Demostració

Això és un cas particular d'un teorema de Henry (1981), p. 39, basat en les desigualtats de Nirenberg-Gagliardo. El Teorema s'aplica immediata-

ment al nostre cas car $\Omega = Q - S$ té la " propietat de l'extensió C^2 " ja que ∂S és de classe C^2 i la frontera de Q són rectes.

En particular tenim que $\|v\|_{L_\infty(\Omega)^2} \leq K_1 \|v\|_\alpha$, per $1/2 < \alpha \leq 1$.

4.5. LEMA

Si $1/2 < \alpha \leq 1$, i F és l'aplicació no lineal definida a 4.1, aleshores

$F: D(A^\alpha) \rightarrow \mathring{J}(\Omega)$ és analítica i envia afitats en afitats.

Demostració

Definim $F_1(v) = P \langle v, \nabla \rangle v$, $F_2(v) = P [\langle \vec{a}, \nabla \rangle v + \langle v, \nabla \rangle \vec{a}]$, $F_3(v) = P[g]$.

Tenim que $F = -(F_1 + RF_2 + F_3)$. Òbviament F_3 és contínua, ja que és constant. Com que F_1 és bilineal i F_2 és lineal, per a veure que són contínues n'hi ha prou veient que són afitats:

$$\begin{aligned} \|F_1(v)\|_{L_2(\Omega)^2} &\leq \|\langle v, \nabla \rangle v\|_{L_2(\Omega)^2} \leq \sqrt{2} \|v\|_{L_\infty(\Omega)^2} \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)^4} \leq \\ &\leq K_2 \|v\|_\alpha^2, \end{aligned}$$

usant el Lema de 4.3 i el Lema 4.4.

$$\begin{aligned} \|F_2(v)\|_{L_2(\Omega)^2} &\leq \sqrt{2} \|\vec{a}\|_{L_\infty(\Omega)^2} \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)^4} + \\ &+ 2 \|\nabla \vec{a}\|_{L_\infty(\Omega)^2} \|v\|_{L_2(\Omega)^2} \leq K_3 \|v\|_\alpha \end{aligned}$$

Per tant F és un polinomi. F és analítica i transforma afitats en afitats.

4.6. SOLUCIONS

Direm que una corba $v: [0, t_1) \rightarrow \mathring{J}(\Omega)$ és solució de (2) i (3) de 4.1 si:

i) v és contínua a $[0, t_1)$ i $v(0) = v_0$.

ii) $\forall t \in (0, t_1)$, $\frac{d}{dt} v(t)$ existeix, $v(t) \in D(A)$, $F(v(t))$ és localment

Hölder contínua en t , i $\frac{d}{dt} v(t) + Av(t) = F(v(t))$.

iii) Per a algun $\rho > 0$, $\int_0^\rho \|F(v(t))\|_{J(\Omega)}^\rho dt < \infty$.

4.7. TEOREMA

Escollim α , $1/2 < \alpha < 1$. Donada $v_0 \in D(A^\alpha)$ existeix una única solució $v(t)$ del problema amb valor inicial v_0 definida en un interval màxim

$$[0, T(v_0)) \quad (0 < T(v_0) \leq +\infty)$$

que a més compleix:

i) Si $T(v_0) < \infty$, $\exists$ una successió $t_n \in [0, T(v_0))$, $t_n \rightarrow T(v_0)$ tal que

$$\|v(t_n)\|_\alpha \rightarrow \infty.$$

ii) $v(t)$ és analítica de $(0, T(v_0))$ en $D(A^\alpha)$.

Aquest Teorema resumeix els resultats que ens interessaran per al que segueix. Hom en trobarà la demostració a Henry (1981). L'existència i unicitat locals són conseqüència del fet que A és sectorial i $F: D(A^\alpha) \rightarrow J(\Omega)$ és localment Lipschitz (*ibid.*, p. 54). La propietat i) se segueix del fet que F envia afitats en afitats (*ibid.*, p. 55), i la propietat ii) és conseqüència del fet que F és analítica (*ibid.*, p. 66).

4.8. CONTINUACIÓ

En els apartats 4.8, 4.9 i 4.10 demostrarem que les solucions del problema de valor inicial són prolongables per tot temps $t \in [0, \infty)$. Ho fem usant essencialment les estimacions de Ladyzhenskaya (1969) i adaptant-les al nostre cas.

Lema

Sigui $v(t)$ una solució donada pel Teorema 4.7. Compleix les següents igualtats per $t \in (0, T(v_0))$

$$i) \quad 0 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{L_2(\Omega)^2}^2 + \|v(t)\|_{H(\Omega)}^2 + R \int_\Omega v(t)^T (\nabla \vec{a}) v(t) + (g, v)_{L_2(\Omega)^2}.$$

$$\text{ii)} 0 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_t(t)\|_{L_2(\Omega)^2}^2 + \|v_t(t)\|_{H(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} v_t(t)^T (\nabla (R\vec{a} + v(t))) v_t(t).$$

Demostració

Notem en primer lloc que els termes de i) i ii) tenen sentit: notem que com a conseqüència de ii) del Teorema 4.7 i del Lema 4.3,

$v_t(t) \in D(A^\alpha) \subset D(A^{1/2}) = H(\Omega)$, car $\alpha > 1/2$, i per tant té sentit escriure

$$\|v_t(t)\|_{H(\Omega)}^2.$$

Diem $L(v(t)) = v_t - \Delta v + \langle R\vec{a} + v, \nabla \rangle v + R \langle v, \nabla \rangle \vec{a}$ per $t > 0$. Usant el Lema 3.4 tenim que la igualtat

$$\begin{aligned} (L(v(t)), v(t))_{L_2(\Omega)^2} &= (-\text{grad } p(t), v(t))_{L_2(\Omega)^2} - (g, v(t))_{L_2(\Omega)^2} = \\ &= -(g, v(t))_{L_2(\Omega)^2} \end{aligned}$$

demostra i).

Per a demostrar ii) notem que $L(v(t))$ és una corba de $L_2(\Omega)^2$ que és diferenciable vista com a corba de $H^{-1}(\Omega)^2$: efectivament, l'únic terme del qual no tenim seguretat que sigui diferenciable (respecte a t) a $L_2(\Omega)^2$ és $\Delta v(t)$, car $v(t)$ és analítica a $D(A^\alpha)$ però $\alpha < 1$, i n'hi ha prou que $v(t)$ sigui analítica a $H(\Omega)$ per a tenir diferenciabilitat de $\Delta v(t)$ a $H^{-1}(\Omega)$.

A $H^{-1}(\Omega)^2$ tenim que

$$\frac{d}{dt} L(v(t)) = v_{tt} - \Delta v_t + \langle R\vec{a} + v, \nabla \rangle v_t + \langle v_t, \nabla \rangle (R\vec{a} + v)$$

on Δv_t s'entén en sentit distribucional.

Recordem que $H^{-1}(\Omega) = H_0^1(\Omega)'$ i com que $v_t \in H(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)^2$ podem prendre productes interns de la dualitat

$$\left\langle \frac{d}{dt} L(v(t)), v_t \right\rangle = (v_{tt}, v_t)_{L_2(\Omega)^2} + (\nabla v_t, \nabla v_t)_{L_2(\Omega)^4} + \int_{\Omega} v_t^T \nabla (R\vec{a} + v) v_t$$

Però d'altra banda $L(v(t)) = -\text{grad } p(t) - g$, i com que el primer membre d'aquesta igualtat és derivable a $H^{-1}(\Omega)^2$, també ho és el segon, i val la

igualtat

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt} (-\text{grad } p(t) - g), v_t \right\rangle &= \frac{d}{dt} \left\langle -\text{grad } p(t), v_t \right\rangle + \\ &+ \left\langle \text{grad } p(t), v_{tt} \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

ja que v_t i v_{tt} són a $\overset{\circ}{J}(\Omega)$. I això prova ii).

4.9. LEMA

Donada una condició inicial $v_0 \in D(A^\alpha)$ i donat qualsevol ε amb

$$0 < \varepsilon < T(v_0),$$

existeix una funció contínua $K: [\varepsilon, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (que depèn de v_0 i de ε) tal que si $v(t)$ és la solució del problema amb valor inicial v_0 es compleix que

$$\|v(t)\|_{H(\Omega)}^2 \leq K(t)$$

i que

$$\|v_t(t)\|_{L_2(\Omega)^2}^2 \leq K(t) \text{ per } t \in [\varepsilon, T(v_0)).$$

Demostració

De la igualtat i) de 4.8 deduïm:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{L_2(\Omega)^2}^2 &\leq 2 \left| (g, v)_{L_2(\Omega)^2} \right| + \\ &+ 2 \left| \int_{\Omega} v^T (\nabla R \vec{a}) v \right| \leq \|g\|_{L_2(\Omega)^2}^2 + \|v\|_{L_2(\Omega)^2}^2 + \\ &+ 4 \|\nabla R \vec{a}\|_{L_\infty(\Omega)^4} \|v\|_{L_2(\Omega)^2} \leq \|g\|_{L_2(\Omega)^2}^2 + C \|v\|_{L_2(\Omega)^2}^2 \end{aligned}$$

i per tant

$$\|v(t)\|_{L_2(\Omega)^2}^2 \leq (\|v(0)\|_{L_2(\Omega)^2}^2 + \|g\|_{L_2(\Omega)^2}^2 / C) e^{Ct} \equiv K_1(t)$$

Ara, d'acord amb el Lema 3.2 podem haver escollit $\vec{a}$ de manera que

$$| \int_{\Omega} \phi^T (\nabla \vec{a}) \phi | \leq \frac{1}{2 |\mathbf{R}|} \|\phi\|_{\dot{H}(\Omega)}^2 \quad \forall \phi \in H(\Omega).$$

Com que $v(t) \in H(\Omega)$ tenim també a partir de i) de 4.8

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|v\|_{\dot{H}(\Omega)}^2 &\leq \|v\|_{\dot{H}(\Omega)}^2 + \mathbf{R} \int_{\Omega} v^T (\nabla \vec{a}) v = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{L_2(\Omega)^2}^2 - (g, v)_{L_2(\Omega)^2} \\ \|v(t)\|_{\dot{H}(\Omega)}^2 &\leq -\frac{d}{dt} \|v(t)\|_{L_2(\Omega)^2}^2 + \|g\|_{L_2(\Omega)^2}^2 + \|v(t)\|_{L_2(\Omega)^2}^2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \|v(s)\|_{\dot{H}(\Omega)}^2 ds &\leq \|v(0)\|_{L_2(\Omega)^2}^2 + \\ &+ \|g\|_{L_2(\Omega)^2}^2 \cdot t + \int_0^t K_1(s) ds \equiv K_2(t) \end{aligned}$$

Afitem a continuació el terme no lineal de la igualtat ii) de 4.8:

$$\begin{aligned} | \int_{\Omega} v_t^T (\nabla v) v_t | &\leq \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)^4} \|v_t v_t^T\|_{L_2(\Omega)^4} \leq \\ &\leq \|v\|_{H(\Omega)} \sqrt{2} \|v_t\|_{L_4(\Omega)^2}^2 \end{aligned}$$

Usem ara la desigualtat esmentada a 1.4. Aquesta desigualtat val, ja que $v_t \in H(\Omega)$. Aquest és el punt de la demostració que seria impossible si $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ (com és sabut, la prolongació per tot temps positiu de les solucions del problema de valor inicial per a les equacions de Navier-Stokes a $\mathbf{R}^3$ és avui en dia un problema encara obert).

$$\begin{aligned} | \int_{\Omega} v_t^T (\nabla v) v_t | &\leq 2 \sqrt{2} \|v\|_{H(\Omega)} \|v_t\|_{L_2(\Omega)^2} \|v_t\|_{H(\Omega)} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|v_t\|_{\dot{H}(\Omega)}^2 + 4 \|v\|_{\dot{H}(\Omega)}^2 \|v_t\|_{L_2(\Omega)^2}^2, \end{aligned}$$

$$\text{usant la desigualtat } ab \leq \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2.$$

Ara apliquem això a la igualtat ii) de 4.8, usant també que

$$| \int_{\Omega} v_t^T (\nabla \vec{a}) v_t | \leq \frac{1}{2 |\mathbf{R}|} \|v_t\|_{\dot{H}(\Omega)}^2.$$

Ens queda:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_t(t)\|_{L_2(\Omega)^2}^2 + \|v_t\|_{H(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{2} \|v_t\|_{H(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|v_t\|_{H(\Omega)}^2 + \\ &+ 4 \|v\|_{H(\Omega)}^2 \|v_t\|_{L_2(\Omega)^2}^2 \\ \frac{d}{dt} \|v_t(t)\|_{L_2(\Omega)^2}^2 &\leq 8 \|v(t)\|_{H(\Omega)}^2 \|v_t(t)\|_{L_2(\Omega)^2}^2 \\ \frac{d}{dt} \ln \|v_t(t)\|_{L_2(\Omega)^2}^2 &\leq 8 \|v(t)\|_{H(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Integrant ara aquesta desigualtat entre ε i t tenim

$$\begin{aligned} \ln \frac{\|v_t(t)\|_{L_2(\Omega)^2}^2}{\|v_t(\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)^2}^2} &\leq 8 \int_{\varepsilon}^t \|v(s)\|_{H(\Omega)}^2 ds \leq 8 K_2(t), \text{ per } t \geq \varepsilon \\ \|v_t(t)\|_{L_2(\Omega)^2}^2 &\leq \|v_t(\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)^2}^2 \exp(8 K_2(t)) \equiv K_3(t), \text{ per } t \geq \varepsilon. \end{aligned}$$

Tornant a la desigualtat (1):

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{H(\Omega)}^2 &\leq |2(v_t, v)_{L_2(\Omega)^2}| + \|g\|_{L_2(\Omega)^2}^2 + \|v\|_{L_2(\Omega)^2}^2 \leq \\ &\leq \|v_t\|_{L_2(\Omega)^2}^2 + \|v\|_{L_2(\Omega)^2}^2 + \|g\|_{L_2(\Omega)^2}^2 + \|v\|_{L_2(\Omega)^2}^2 \leq \\ &\leq K_3(t) + 2 K_1(t) + \|g\|_{L_2(\Omega)^2}^2 \equiv K(t) \text{ per } t \geq \varepsilon \end{aligned}$$

i queda demostrat el lema.

4.10. TEOREMA

Les solucions donades pel Teorema 4.7 són prolongables per tot temps positiu.

Demostració

Sigui $v(t)$ la solució obtinguda amb $v(0) = v_0$, sigui $\varepsilon \in (0, T(v_0))$ qualsevol, i sigui $K(t)$ la funció donada pel Lema 4.9. Tenim que per $t \geq \varepsilon$

$$\begin{aligned} &\|F(v(t))\|_{L_2(\Omega)^2} = \\ &= \|P[-\langle R\vec{a}, \nabla \rangle v(t) - \langle v(t), \nabla \rangle R\vec{a} - \langle v(t), \nabla \rangle v(t) - g]\|_{L_2(\Omega)^2} \end{aligned}$$

$$\leq C_1 \|\nabla v(t)\|_{L_2(\Omega)^4} + C_2 \|v(t)\|_{L_2(\Omega)^2} + \\ \|v(t)\|_{L_\infty(\Omega)^2} 2 \|\nabla v(t)\|_{L_2(\Omega)^4} + C_3 \leq C_4 K(t) + 2 C_5 K(t) \|v(t)\|_\alpha + C_3$$

Prenent normes a la igualtat

$$A v(t) = -v_t + F(v(t))$$

tenim

$$\|Av(t)\|_{L_2(\Omega)^2} \leq \|v_t\|_{L_2(\Omega)^2} + \|F(v(t))\|_{L_2(\Omega)^2} \leq \\ \leq (C_4 + 1) K(t) + 2 C_5 K(t) \|v(t)\|_\alpha + C_3 \text{ per } t \in [\varepsilon, T(v_0)].$$

Usem ara la important desigualtat

$$\|A^\alpha v\|_{L_2(\Omega)^2} \leq \|Av\|_{L_2(\Omega)^2}^\alpha \|v\|_{L_2(\Omega)^2}^{1-\alpha},$$

vàlida per $v \in D(A)$, ja que A és autoadjunt i positiu (Henry (1981), p. 28).
Com que $v(t) \in D(A)$ per $t > 0$, en concloem:

$$\|Av(t)\|_{L_2(\Omega)^2} \leq (C_4 + 1) K(t) + 2 C_5 K(t) \|Av(t)\|^\alpha (CK(t))^{1-\alpha} + \\ + C_3 \text{ per } t \in [\varepsilon, T(v_0)]. \quad (1)$$

Si existís una successió $t_n \in (0, T(v_0))$ com al Teorema 4.7, $t_n \rightarrow T(v_0)$,
i $\|v(t_n)\|_\alpha \rightarrow \infty$, aleshores necessàriament $\|Av(t_n)\|_{L_2(\Omega)^2} \rightarrow \infty$ ja que

$$v(t) \in D(A)$$

i l'encabiment $D(A) \subset D(A^\alpha)$ és continu.

Per n prou gran, $t_n > \varepsilon$ i val la desigualtat (1). Si fos $T(v_0) < \infty$ podríem prendre un nombre S tal que

$$(C_4 + 1) K(t) < S, 2 C_5 K(t) (CK(t))^{1-\alpha} < S, C_3 < S \text{ per } t \in [\varepsilon, T(v_0)].$$

I tindrem

$$\|Av(t)\|_{L_2(\Omega)^2} \leq S(2 + \|Av(t)\|_{L_2(\Omega)^2}^\alpha) \text{ per } t \in [\varepsilon, T(v_0)]$$

i en particular

$$\|Av(t_n)\|_{L_2(\Omega)^2}^{1-\alpha} \leq S(2 \|Av(t_n)\|_{L_2(\Omega)^2}^\alpha + 1)$$

per n prou gran. Com que $0 < \alpha < 1$, és impossible que

$$\|Av(t_n)\|_{L_2(\Omega)^2} \rightarrow \infty$$

i el Teorema queda demostrat.

4.11. ESTABILITAT I INESTABILITAT DE SOLUCIONS ESTACIONÀRIES

La formulació abstracta del problema de valor inicial (2), (3) de 4.1 ens permet d'aplicar immediatament els resultats coneguts d'estabilitat i inestabilitat de solucions estacionàries segons l'espectre de la part lineal. Si $\vec{a} + u$ és una solució estacionària, la part lineal $A - DF(u)$, que en direm A_u , és l'operador de $J(\Omega)$ amb domini $D(A_u) = D(A) = H^2(\Omega)^2 \cap H(\Omega)$ definit per

$$A_u(v) = Av + P[\langle \vec{a} + u, \nabla \rangle v + \langle v, \nabla \rangle (\vec{a} + u)]$$

Teorema (estabilitat): Si existeix $\beta > 0$ tal que $\sigma(A_u) \subset \{\operatorname{Re} \lambda > \beta\}$, aleshores u és asimptòticament estable a $D(A^a)$. Més concretament, existeixen $\rho > 0$, $M \geq 0$ tals que si

$$\|v_0 - u\|_\alpha \leq \rho/2 M,$$

aleshores la solució del problema de valor inicial $v(t)$ amb $v(0) = v_0$ compleix

$$\|v(t) - u\|_\alpha \leq 2 M e^{-\beta t} \|v_0 - u\|_\alpha$$

(per a la demostració, vegeu Henry (1981), p. 98).

Teorema (inestabilitat): Si $\sigma(A_u) \cap \{\operatorname{Re} \lambda < 0\}$ és no buit, aleshores u és inestable, és a dir, existeix $\varepsilon > 0$ i una successió $v_n \in D(A^a)$ amb $\|v_n - u\|_\alpha \rightarrow 0$ tals que per a tota n

$$\sup_{t > 0} \|v_n(t) - u\| \geq \varepsilon,$$

on $v_n(t)$ és la solució del problema de valor inicial amb $v_n(0) = v_n$ (per a la demostració, vegeu Henry (1981), p. 105).

4.12. ESTABILITAT PER L'ENERGIA

Donem ara un criteri d'estabilitat asimptòtica monòtona i global en la norma de $L_2(\Omega)^2$, del tipus del Teorema de Serrin (vegeu Joseph (1976), I, p. 15).

Teorema

En les hipòtesis del Teorema 3.8, la solució estacionària única u és globalment monòtonament asimptòticament estable en la norma de $L_2(\Omega)^2$.

Demostració

Considerem les solucions del problema de valor inicial amb la forma

$$\vec{Ra} + u + v(t).$$

Com que $\vec{Ra} + u$ és solució estacionària s'ha de complir que

$$v_t + \text{grad } p = \Delta v - \langle \vec{Ra} + u, \nabla \rangle v - \langle v, \nabla \rangle (\vec{Ra} + u) - \langle v, \nabla \rangle v$$

Multiplicant escalarment a $L_2(\Omega)^2$ per $v(t)$ i usant el Lema 3.4 queda

$$(v_t, v)_{L_2(\Omega)^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{L_2(\Omega)^2}^2 = -\|v(t)\|_{H(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} v^T \nabla (\vec{Ra} + u) v$$

Però d'acord amb la desigualtat (4) del Teorema 3.8, existeix $\delta < 1$ tal que

$$\left| \int_{\Omega} v^T \nabla (\vec{Ra} + u) v \right| \leq \delta \|v\|_{H(\Omega)}^2$$

I per tant,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{H(\Omega)}^2 \leq (\delta - 1) \|v\|_{L_2(\Omega)^2}^2 \leq (\delta - 1) C^{-2} \|v(t)\|_{L_2(\Omega)^2}^2$$

on C és la constant de la desigualtat de Poincaré. Per tant,

$$\|v(t)\|_{L_2(\Omega)^2}^2 \leq \|v(0)\|_{L_2(\Omega)^2}^2 \cdot \exp(t(\delta - 1)/C^2)$$

d'on se segueix l'estabilitat asimptòtica global ja que $(\delta - 1) < 0$. Com que

$$\frac{d}{dt} \|v(t)\|^2 < 0 \quad \text{si } v(t) \neq 0,$$

l'estabilitat és monòtona.

5. EL PROBLEMA ESPECTRAL

5.1. EL PROBLEMA

En aquest capítol estudiem l'espectre dels operadors A_u definits a 4.11 i ens interessem pel caràcter de la part de l'espectre més propera al semiplà $\{\operatorname{Re} z < 0\}$. Com ja hem vist, l'existència d'una part no buida de l'espectre en aquest semiplà implica inestabilitat de la solució estacionària u , però la importància d'aquesta part de l'espectre també es deu a la possibilitat d'estudiar moviments secundaris propers a la solució estacionària, produïts per bifurcació quan una part de l'espectre travessa l'eix imaginari de dreta a esquerra en variar algun paràmetre de l'equació (el nombre de Reynolds R , les forces de cos, etc.).

Els fenòmens de bifurcació en equacions semilineals d'evolució com les de Navier-Stokes han estat molt estudiats els darrers anys. Entre d'altres referències podem citar Iooss (1972), (1973), Joseph i Sattinger (1972), Judovich (1971), Sattinger (1973), Kirchgässner i Kielhöfer (1973), Marsden i Mc Cracken (1976), Joseph (1976) I i II, Iooss, Nielsen i True (1978), Calsina (1981), Henry (1981).

Sota tots els punts de vista citats, per a provar l'existència de la solució bifurcada i estudiar la seva estabilitat cal que la part de l'espectre que creua l'eix imaginari sigui un nombre finit de valors propis de multiplicitat finita. Això sempre és cert per a operadors amb resolvent compacta, com ara la part lineal de Navier-Stokes per a un problema en un recinte afitat, però això no és necessàriament cert en dominis no afitats. El mateix operador de Laplace a tot l'espai $\mathbf{R}^2$ és un exemple fàcil en què el zero és un valor spectral no aïllat i que no és valor propi. En canvi, això no és així per als nostres operadors A_u , com ho demostrarem al Teorema 5.12.

Els nostres resultats sobre l'espectre de la part lineal en una solució estacionària de les obtingudes al Teorema 3.5 són probablement similars a certs resultats de K.I. Babenko sobre les solucions de Finn i Smith (1967). Malauradament, no hem pogut trobar cap referència a aquests resultats que no fos verbal i poc precisa.

Nota

En aquest capítol i en el següent els espais de funcions definits a 1.3 es consideraran complexificats, si no es diu explícitament el contrari.

5.2. DEFINICIÓ

Definim l'operador d'Oseen B_R a l'espai $\mathring{J}(\Omega)$ amb domini (dens)

$$D(B) = D(A) = H^2(\Omega)^2 \cap H(\Omega)$$

com

$$B_R v = -P \Delta v + P \langle (R, 0), \nabla \rangle v$$

Notem que

$$\langle (R, 0), \nabla \rangle v = R \frac{\partial}{\partial x} v, \text{ i que si } v \in H(\Omega) \text{ aleshores } \frac{\partial}{\partial x} v \in \mathring{J}(\Omega)$$

(això és cert per $v \in \mathring{J}(\Omega)$, i s'estén per continuïtat). En conseqüència

$$P \frac{\partial}{\partial x} v = \frac{\partial}{\partial x} v,$$

i l'operador B_R queda

$$B_R v = A v + R \frac{\partial}{\partial x} v$$

on A és l'operador de Stokes.

Hem donat a B_R el nom d'operador d'Oseen ja que el paper de l'operador B_R és equivalent en el nostre cas al paper de les equacions d'Oseen en un medi il·limitat (vegeu Berker (1963), p. 287).

5.3. LEMA

i) Donat $R \in \mathbb{R}$, existeixen $a, b > 0$, $b < 1$ tals que $\forall v \in D(A)$

$$\left\| R \frac{\partial}{\partial x} v \right\|_{L_2(\Omega)^2} \leq a \|v\|_{L_2(\Omega)^2} + b \|A v\|_{L_2(\Omega)^2}$$

(si es compleix aquesta desigualtat hom diu que l'operador

$$R \frac{\partial}{\partial x} v$$

és relativament afitat respecte a A , i del nombre b se'n diu fita relativa).

ii) B_R és tancat.

Demostració

ii) se segueix de i) per un Teorema de Kato (1966), p. 190, ja que sabem que A és tancat. Per a veure ii) fem:

$$\begin{aligned} v \in D(A) &\Rightarrow (Av, v)_{L_2(\Omega)^2} = \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)^4}^2 \Rightarrow \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)^4}^2 \leq \\ &\leq \|Av\|_{L_2(\Omega)^2} \|v\|_{L_2(\Omega)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\| \frac{\partial}{\partial x} v \right\|_{L_2(\Omega)^2} \leq \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)^4} \leq \varepsilon \|Av\|_{L_2(\Omega)^2} + \\ &\quad + \frac{1}{4\varepsilon} \|v\|_{L_2(\Omega)^2}^2, \quad \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

on hem usat la desigualtat

$$\alpha \beta \leq \varepsilon \alpha^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \beta^2.$$

Prenent $\varepsilon < |R|^{-1}$ se segueix el resultat.

5.4. TEOREMA

$\sigma(B_R) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq C^{-2}, (\operatorname{Im} z)^2 \leq R^2 \operatorname{Re} z\}$, on C és la constant de la desigualtat de Poincaré. Aquest conjunt té l'aspecte representat a la fig. 5.

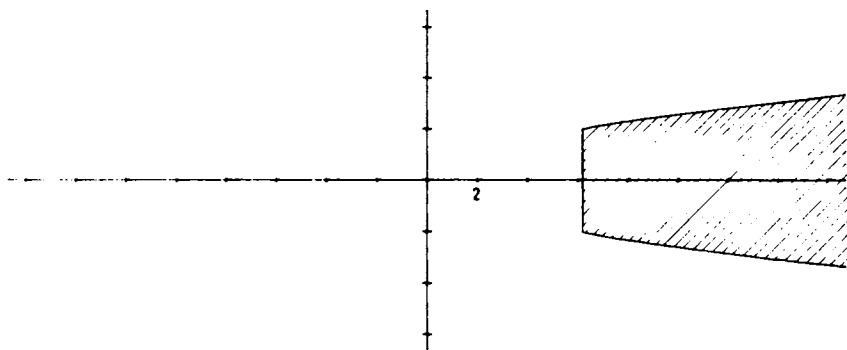


Fig. 5

Demostració

Vegem primer que el rang numèric de B_R , $\theta(B_R)$ està en aquest conjunt:

$$z \in \theta(B_R) \text{ si } \exists v \in D(B_R) \text{ amb } \|v\|_{L_2(\Omega)^2} = 1$$

tal que $z = (B_R v, v)_{L_2(\Omega)^2}$. Si $v = v^r + i v^i$ (parts real i imaginària), tenim

$$\begin{aligned} z &= (B_R v, v)_{L_2(\Omega)^2} = (\nabla v, \nabla v)_{L_2(\Omega)^4} + R \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} v \right)^T \bar{v}. \\ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} v \right)^T \bar{v} &= \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} v^r \right)^T v^r + \left(\frac{\partial}{\partial x} v^i \right)^T v^i \right] + \\ &+ i \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} v^i \right)^T v^r - \left(\frac{\partial}{\partial x} v^r \right)^T v^i \right]. \end{aligned}$$

Però la primera d'aquestes dues integrals és zero: efectivament, si

$$f \in H_0^1(\Omega) \text{ (real),}$$

aleshores

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) f = 0,$$

ja que això és cert si $f \in C_0^\infty(\Omega)$ (integrant primer respecte a x) i s'estén a $H_0^1(\Omega)$ per continuïtat. Usant això per cada component de v^r i de v^i s'obté que la primera integral és zero.

Per tant, $\operatorname{Re} z = \|v\|_{H(\Omega)}^2 \geq C^{-2}$, ja que $\|v\|_{L_2(\Omega)^2} = 1$. A més

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} z| &= |R| \left| \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} v^i \right)^T v^r - \left(\frac{\partial}{\partial x} v^r \right)^T v^i \right] \right| \leq \\ &\leq |R| \int_{\Omega} \left(\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} v^i \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x} v^r \right)^2 \right]^{1/2} [(v^r)^2 + (v^i)^2]^{1/2} \right) \leq \\ &\leq |R| \varepsilon \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} v^i \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x} v^r \right)^2 \right] + \frac{|R|}{4\varepsilon} \int_{\Omega} [(v^r)^2 + (v^i)^2] \leq \\ &\leq |R| \left(\varepsilon \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)^2}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

i fent $\varepsilon = (2 \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)^4})^{-1}$ concloem que

$$|\operatorname{Im} z| \leq |R| \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)^4} = |R| (\operatorname{Re} z)^{1/2}$$

Ara, com que B és tancat tenim que $\sigma(B_R) \subset \theta(B_R)$ si podem demostrar que existeix $z \notin \theta(B_R)$ tal que $z \notin \sigma(B_R)$ (Kato (1966), p. 268). Pren-guem $z = it$ per $t \in \mathbb{R}^+$. Per a veure que $z \in \rho(B_R)$ per a algun t n'hi haurà prou amb veure (Kato (1966), p. 214) que per a algun t

$$a \|(A - itI)^{-1}\| + b \|A(A - itI)^{-1}\| < 1$$

on a i b són les constants del Lema 5.3 i), i $\|\cdot\|$ és la norma de l'espai d'ope-radors $L(\int(\Omega), \int(\Omega))$.

Però com que A és autoadjunt tenim que

$$\|(A - itI)^{-1}\| \leq 1/t, \quad \|A(A - itI)^{-1}\| \leq 1$$

(Kato (1966), p. 271) i com que $b < 1$ el que volem es verifica si t és prou gran.

5.5. LEMA

L'adjunt de B_R és B_{-R} .

Demostració

Notem que $D(B_R)$ és dens a $\dot{J}(\Omega)$, i que per tant l'adjunt de B_R , B_R^* està definit unívocament.

Hom veu fàcilment que per $v, w \in D(B_R)$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} v \right)^T \bar{w} = - \int_{\Omega} v^T \left(\frac{\partial}{\partial x} w \right).$$

En conseqüència, per $v, w \in D(B_R)$, $(B_R v, w)_{L_2(\Omega)^2} = (v, B_{-R} w)_{L_2(\Omega)^2}$, per tant tenim que $B_{-R} \subset B_R^*$.

Però per 5.3 i 5.4 sabem que B_{-R} és tancat i invertible amb continuïtat. Per tant el rang de B_{-R} és tot $\dot{J}(\Omega)$. Si B_R^* fos una extensió no trivial de B_{-R} hauria de tenir nucli no trivial. Però això no és possible ja que el nucli de B_R^* és, per definició, l'ortogonal a la clausura del rang de B_R , o sigui zero.

5.6. DEFINICIÓ

Considerem l'operador C definit per

$$Cv = P[\langle -R\vec{b} + u, \nabla \rangle v - \langle v, \nabla \rangle (-R\vec{b} + u)]$$

on $\vec{b} = (1, 0) - \vec{a}$ i u és tal que $\vec{a} + u$ és una solució estacionària de les obtingudes al Capítol 3.

És clar que es compleix que per $v \in D(A)$

$$A_u v = B_R v + C v$$

5.7. LEMA

L'operador A_u amb domini $D(A_u) = D(A)$ és tancat.

Demostració

Pel que hem dit a la demostració del Lema 5.3 ii) n'hi haurà prou amb veure que C és relativament afitat respecte a A amb fita relativa tan petita

com volguem, car llavors

$$v \rightarrow R \frac{\partial}{\partial x} v + C v$$

serà relativament afitat respecte a A amb fita relativa menor que 1, i A_u serà tancat.

Pel primer terme tenim:

$$\begin{aligned} \| \langle -R\vec{b} + u, \nabla \rangle v \|_{L_2(\Omega)^2} &\leq \| -R\vec{b} + u \|_{L_\infty(\Omega)^2} \| \nabla v \|_{L_2(\Omega)^4} \leq \\ &\leq \| -R\vec{b} + u \|_{L_\infty(\Omega)^2} (\varepsilon \| Av \|_{L_2(\Omega)^2} + \frac{1}{4\varepsilon} \| v \|_{L_2(\Omega)^2}) \end{aligned}$$

per a qualsevol $\varepsilon > 0$, d'acord amb el càlcul de 5.3. I també:

$$\begin{aligned} \| \langle v, \nabla \rangle (-R\vec{b} + u) \|_{L_2(\Omega)^2} &\leq 2 \| v \|_{L_4(\Omega)^2} \| \nabla (-R\vec{b} + u) \|_{L_4(\Omega)^4} \leq \\ &\leq 2 \sqrt{2} C^{1/2} \| \nabla v \|_{L_2(\Omega)^4} \| \nabla (-R\vec{b} + u) \|_{L_4(\Omega)^4} \leq \\ &\leq 2 \sqrt{2} C^{1/2} \| \nabla (-R\vec{b} + u) \|_{L_4(\Omega)^4} (\varepsilon \| Av \|_{L_2(\Omega)^2} + \frac{1}{4\varepsilon} \| v \|_{L_2(\Omega)^2}) \end{aligned}$$

on hem usat les desigualtats d'1.4. El fet que $\nabla u \in L_4(\Omega)^4$ és conseqüència del fet que $u \in H^2(\Omega)^2$ i de l'encabiment $H^1(\Omega) \subset L_4(\Omega)$ d'Adams (1975), p. 106.

5.8. TEOREMA

El rang numéric de A_u està contingut en un conjunt de forma

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid (\operatorname{Im} z)^2 \leq C_1 (\operatorname{Re} z + C_2) \} \text{ amb } C_1, C_2 > 0.$$

Demostració

Prenem $v \in D(A_u)$, $\|v\|_{L_2(\Omega)^2} = 1$. Usant les estimacions del Lema anterior tenim

$$\begin{aligned} | \langle Cv, v \rangle_{L_2(\Omega)^2} | &\leq [-R\vec{b} + \|u\|_{L_\infty(\Omega)^2} + \\ &2 \sqrt{2} C \| \nabla (-R\vec{b} + u) \|_{L_4(\Omega)^4}] \| \nabla v \|_{L_2(\Omega)^4} \end{aligned}$$

Si anomenem α la quantitat dins els parèntesis quadrats, tenim

$$|(Cv, v)_{L_2(\Omega)^2}| \leq \alpha \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)^4} \leq \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)^4}^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$

Usant ara les estimacions del Teorema 5.4, si $z = (A_u v, v)_{L_2(\Omega)^2}$ tenim que

$$\operatorname{Re} z \geq \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)^4}^2 - \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)^4}^2 - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{1}{2} (\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)^4}^2 - \alpha^2)$$

$$|\operatorname{Im} z| \leq |R| \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)^4} + \alpha \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)^4} = (|R| + \alpha) \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)^4}$$

$$\frac{|\operatorname{Im} z|^2}{(|R| + \alpha)^2} \leq 2 \operatorname{Re} z + \alpha^2$$

5.9. ESPECTRE ESSENCIAL

Definició

(Gohberg-Krein, (1969)): Si T és un operador lineal en un espai de Banach X , un *punt normal* per T és un punt $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que o bé està en el conjunt resolvent de T o bé és un valor propi aïllat de T de multiplicitat (algebri- ca) finita.

Noteu que el conjunt de punts normals de T , $\mathfrak{p}(T)$, és obert i que

$$\rho(T) \subset \mathfrak{p}(T).$$

Definim l'*espectre essencial* de T com $\sigma_E(T) = \mathbb{C} - \mathfrak{p}(T)$.

(Hi ha diverses definicions d'espectre essencial en circulació; vegeu Kato (1966), p. 243, p. ex.).

5.10. TEOREMA

(Gohberg-Krein): Suposem que X és un espai de Banach,

$$T: D(T) \subset X \rightarrow X$$

un operador lineal tancat, i $L: D(L) \subset X \rightarrow X$ un operador lineal amb

$$D(T) \subset D(L),$$

i suposem que, per a algun $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $L(T - \lambda_0 I)^{-1}$ és compacte (direm que L és T -compacte). Sigui U un obert connex de $\mathbb{C}$ constituït enterament per punts normals de T . Aleshores, o bé U consisteix enterament en punts normals de $T + L$, o enterament en valors propis de $T + L$.

(Aquesta formulació és deguda a Henry (1981), p. 136, com a generalització del resultat de Gohberg i Krein (1966), p. 22, per a operadors afinitats).

5.11. TEOREMA

C és B_R -compacte.

Demostració

Com que $0 \notin \sigma(B_R)$ (Teorema 5.4), podem considerar

$$B_R^{-1}: \mathring{J}(\Omega) \rightarrow \mathring{J}(\Omega).$$

Donem ara a l'espai $D(B) = D(A) = H^2(\Omega)^2 \cap H(\Omega)$ l'estructura d'espai de Hilbert induïda per $H^2(\Omega)^2$. B és continu de $D(B)$ en $\mathring{J}(\Omega)$, i, estant definit a tot $D(B)$, també és tancat. En conseqüència $B^{-1}: \mathring{J}(\Omega) \rightarrow D(B)$ també és tancat i definit a tot $\mathring{J}(B)$, i pel Teorema de la Gràfica Tancada és continu.

Ara demostrem que la composició $\mathring{J}(\Omega) \xrightarrow{B^{-1}} D(B) \xrightarrow{C} \mathring{J}(\Omega)$ és compacta. Per a veure-ho n'hi ha prou amb provar que

$$v \rightarrow \langle -R\vec{b} + u, \nabla \rangle v + \langle v, \nabla \rangle (-R\vec{b} + u)$$

és compacte com a operador de $H^2(\Omega)^2$ en $L_2(\Omega)^2$.

Notem que l'operador

$$v \rightarrow \langle -\vec{b}, \nabla \rangle v + \langle v, \nabla \rangle (-\vec{b})$$

és compacte com a operador de $H^2(\Omega)$ en $L_2(\Omega)^2$ car el seu rang és contingut a $H^1(\Omega_b)$, on Ω_b és un obert afiat qualsevol que contingui el suport (com-

pacte) de $\bar{b}$ intersecat amb Ω , i el que diem es dedueix del fet que la inclusió

$$H^1(\Omega_b) \hookrightarrow L_2(\Omega_b)$$

és compacta, car Ω_b és afitat (Teorema de Rellich i Kondrachov) i la inclusió $L_2(\Omega_b) \hookrightarrow L_2(\Omega)$ (estenenent per zero) és contínua.

Definim ara

$$\tilde{C} : H^2(\Omega)^2 \rightarrow L_2(\Omega)^2 \text{ per } \tilde{C}(v) = \langle u, \nabla \rangle v + \langle v, \nabla \rangle u.$$

Ens resta veure que $\tilde{C}$ és compacte. Siguin $\phi_n \in J(\Omega)$ tals que $\phi_n \rightarrow u$ a $H(\Omega)$ i definim $\tilde{C}_n(v) = \langle \phi_n, \nabla \rangle v + \langle v, \nabla \rangle \phi_n$, per $v \in H^2(\Omega)^2$. Notem que

$$\begin{aligned} \|\tilde{C}_n(v) - \tilde{C}(v)\|_{L_2(\Omega)^2} &\leq 2 \|\phi_n - u\|_{L_4(\Omega)^2} \|\nabla v\|_{L_4(\Omega)^4} + \\ &+ 2 \|\nabla \phi_n - \nabla u\|_{L_2(\Omega)^4} \|v\|_{L_\infty(\Omega)^2} \leq K \|\phi_n - u\|_{H(\Omega)} \|v\|_{H^2(\Omega)^2} \end{aligned}$$

amb K independent de u, v i n , on hem emprat l'encabiment continu

$$H^1(\Omega) \rightarrow L_4(\Omega)$$

(Adams (1975), p. 106).

Per tant $\tilde{C}_n$ tendeix a $\tilde{C}$ en la norma dels operadors continus de $H^2(\Omega)^2$ en $L_2(\Omega)^2$. Però els $\tilde{C}_n$ són compactes perquè les ϕ_n tenen suport compacte i apliquem a elles el mateix raonament que a $\bar{b}$.

D'això se segueix el resultat, ja que el límit (uniforme) d'operadors compactes és compacte.

5.12. TEOREMA

Per a qualsevol $\varepsilon > 0$, $\sigma(A_v) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda < C^{-2} - \varepsilon\}$ o bé és buit, o bé consisteix en un nombre finit de valors propis (aïllats) de multiplicitats (algebriques) finites.

Demostració

Apliquem el Teorema 5.10 a

$$U = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\lambda) < C^{-2}, \text{ o } (\operatorname{Im} \lambda)^2 > R^2 \operatorname{Re} \lambda\}$$

(el complementari del conjunt de la fig. 5). Els punts de U són punts normals de B_R , pel Teorema 5.4. Com que C és B_R -compacte, tenim que U és format o bé per punts normals de $A_u = B_R + C$ o bé enterament per valors propis de A_u .

No pot ésser que tots els punts de U siguin valors propis, car els valors propis de A_u són continguts a $\theta(A_u)$, i pel Teorema 5.8 hi ha punts de U fora de $\theta(A_u)$. Per tant, $U \subset \tilde{\theta}(A_u)$.

En conseqüència $\sigma(A_u) \cap U$ són valors propis isolats de multiplicitat (algebàrica) finita. Però com que aquests valors propis han d'estar a $\theta(A_u)$, i pel Teorema 5.8 dins la paràbola

$$\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid (\operatorname{Im} \lambda)^2 \leq C_1 (\operatorname{Re} \lambda + C_2) \} \text{ amb } C_1, C_2 > 0$$

i han d'ésser aïllats, en concloem que a $\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda < C^{-2} - \varepsilon \}$ només n'hi pot haver un nombre finit.

6. ALGUNS CÀLCULS SOBRE L'ESPECTRE

6.1. EL PROBLEMA

En aquest capítol calculem l'espectre de l'operador

$$B_R = A + R \frac{\partial}{\partial x}$$

en el canal Q sense obstacle, és a dir l'espectre de B_R com a operador de $\mathcal{J}(Q)$ amb domini $H^2(Q)^2 \cap H(Q)$. El càlcul el fem emprant la transformada de Fourier en la direcció de x .

El coneixement d'aquest espectre ens permetrà de calcular la constant C d'1.4 en el cas general $\Omega = Q - S$, i també demostrar que l'espectre essencial dels operadors A_n , que en el capítol anterior hem vist que quedava confinat a $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq C^{-2}\}$, és sempre no buit, ja que conté un conjunt Σ_R que determinarem explícitament.

Parlant sense precisió, la transformada de Fourier en la direcció de x ens representa un camp $u(x, y) \in \mathcal{J}(Q)$ com

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi, y) e^{i\xi x} d\xi$$

(usant el Teorema d'inversió), és a dir ens representa el camp $u(x, y)$ com una integral de camps de Q de forma $\hat{u}_\xi(y) e^{i\xi x}$. Un camp de la forma

$$(a(y), b(y)) e^{i\xi x}$$

mai no és de $L_2(Q)^2$ (si no és idènticament zero), però veure com actua l'operador B_R sobre els camps d'aquesta forma ens donarà la informació que necessitem sobre l'espectre de B_R .

Els apartats 6.2 fins a 6.9 contenen definicions i resultats sobre parelles $(a(y), b(y)) \in L_2(-1, 1)^2$ que han d'ésser vistes com a representacions de camps $(a(y), b(y)) e^{i\xi x}$ per a alguna ξ real.

Com es veurà, exclourem sempre el cas $\xi = 0$ (camps constants respecte a x). Considerar-lo implicaria haver d'anar més amb compte en alguns càlculs, i de vegades obtenir resultats qualitativament diferents. En tot cas, als efectes del que ens interessa a la demostració del resultat que busquem, el conjunt $\xi = 0$ serà de mesura zero dins una integral respecte de ξ , i podrà ésser ignorat.

Com hem dit al capítol anterior, els espais que considerarem seran sempre complexificats, excepte quan es digui el contrari.

6.2. DEFINICIONS

Donat $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq 0$, definim

$$\mathcal{J}_\xi(-1, 1) = \{ (a, b) \in L_2(-1, 1)^2 \mid b \in H_0^1(-1, 1), \text{ i } i\xi a + b' = 0 \},$$

on b' és la derivada de b . Com es veu, si $(a, b) \in \mathcal{J}_\xi(-1, 1)$, aleshores

$$(a(y), b(y)) e^{i\xi x}$$

té divergència zero i és paral·lel a ∂Q .

És fàcil de veure que $\mathcal{J}_\xi(-1, 1)$ és un subespai tancat de $L_2(-1, 1)^2$ que coincideix amb la clausura de $\{ (a, b) \in C_0^\infty(-1, 1)^2 \mid i\xi a(y) + b'(y) = 0 \}$, i que per $(a, b) \in \mathcal{J}_\xi(-1, 1)$ podem considerar $\psi(y) = i\xi^{-1}b(y)$, que fa el paper de funció de corrent, tal que $\psi \in H_0^1(-1, 1)$ i que

$$a(y) = \psi'(y), \quad b(y) = -i\xi\psi(y). \quad (1)$$

6.3. PROPOSICIÓ

Si definim $G_\xi(-1, 1) = \mathcal{J}_\xi(-1, 1)$ (ortogonal a $L_2(-1, 1)^2$), per $\xi \neq 0$, tenim que $(a, b) \in G_\xi(-1, 1) \Leftrightarrow \exists p \in H^1(-1, 1)$ tal que $(a, b) = (i\xi p, p')$.

(Això fa el paper de descomposició en gradients i solenoïdals paral·lels a la frontera).

Demostració

$$(a, b) \in G_{\xi}(-1, 1) \quad \forall \psi \in C_0^{\infty}(-1, 1),$$

$$\int_{-1}^1 (a\overline{\psi'} + i\xi b \overline{\psi}) dy = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dy} a = i\xi b \text{ (en sentit distribucional).}$$

Aleshores $a \in H^1(-1, 1)$ i podem prendre $p(y) = -i\xi^{-1} a(y)$.

6.4. LEMA

Sigui P_{ξ} la projecció ortogonal de $L_2(-1, 1)^2$ en $\mathcal{H}_{\xi}(-1, 1)$ per $\xi \neq 0$. Donat $(a, b) \in L_2(-1, 1)^2$, l'aplicació $\xi \rightarrow P_{\xi}(a, b)$ és contínua de $\mathbb{R} - \{0\}$ en $L_2(-1, 1)^2$.

Demostració

Sigui $\xi \in \mathbb{R} - \{0\}$, i vegem que l'aplicació és contínua a ξ . Suposem

$$(a, b) = (a_1, b_1) + (i\xi p_1, p_1') \text{ amb } (a_1, b_1) = P_{\xi}(a, b) \text{ i } p_1 \in H^1(-1, 1).$$

Aleshores, per $\eta \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$\begin{aligned} P_{\eta}(a_1, b_1) &= P_{\eta}\left(a_1, \frac{\eta}{\xi} b_1\right) + P_{\eta}\left(0, \left(1 - \frac{\eta}{\xi}\right) b_1\right) = \\ &= \left(a_1, \frac{\eta}{\xi} b_1\right) + P_{\eta}\left(0, \left(1 - \frac{\eta}{\xi}\right) b_1\right) \end{aligned}$$

$$P_{\eta}(i\xi p_1, p_1') = P_{\eta}(i\eta p_1, p_1') + P_{\eta}(i(\xi - \eta) p_1, 0) = P_{\eta}(i(\xi - \eta) p_1, 0)$$

$$\begin{aligned} \|P_{\eta}(a, b) - (a_1, b_1)\|_{L_2(-1, 1)^2} &\leq \|(a_1, b_1) - \left(a_1, \frac{\eta}{\xi} b_1\right)\|_{L_2(-1, 1)^2} + \\ &+ \|P_{\eta}\left(0, \left(1 - \frac{\eta}{\xi}\right) b_1\right)\|_{L_2(-1, 1)^2} + \|P_{\eta}(i(\xi - \eta) p_1, 0)\|_{L_2(-1, 1)^2} \end{aligned}$$

que és evident que tendeix a zero si $\eta \rightarrow \xi$.

6.5. DEFINICIONS

Per $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq 0$ considerem

$$H_{\xi}(-1,1) = \{ (a, b) \in H_0^1(-1,1)^2 \mid i\xi a + b' = 0 \}.$$

Notem que si $(a, b) \in H_{\xi}(-1,1)$ llavors $b \in H_0^2(-1,1)$ ja que

$$b' = -i\xi a \in H_0^1(-1,1),$$

i per tant $b(y)$ i $b'(y)$ valen zero a $y = \pm 1$. Per tant

$$\psi(y) = i\xi^{-1} b(y) \in H_0^2(-1,1).$$

Donat $R \in \mathbb{R}$, considerem l'operador B_{ξ}^R de $\mathring{J}(-1,1)$ amb domini

$$H^2(-1,1)^2 \cap H_{\xi}(-1,1)$$

definit per

$$B_{\xi}^R(a, b) = P_{\xi}(-a'', -b'') + \xi^2(a, b) + iR\xi(a, b)$$

que fa el mateix paper que B_R a $\mathring{J}(Q)$.

Òbviament B_{ξ}^R és continu de $H^2(-1,1)^2 \cap H_{\xi}(-1,1)$ en $\mathring{J}(-1,1)$. Usant el Lema anterior també tenim:

Corol·lari

Si $\xi \rightarrow v(\xi)$ és una aplicació contínua de $\mathbb{R} - \{0\}$ en $H^2(-1,1)^2$ tal que

$$v(\xi) \in D(B_{\xi}^R) \quad \forall \xi \in \mathbb{R} - \{0\},$$

aleshores l'aplicació $\xi \rightarrow B_{\xi}^R v(\xi)$ és contínua de $\mathbb{R} - \{0\}$ en $L_2(-1,1)^2$.

6.6. PROPOSICIÓ

$$\forall R \in \mathbb{R}, i \forall \xi \in \mathbb{R} - \{0\}$$

- i) B_{ξ}^R és un operador tancat amb resolvent compacta.
- ii) B_{ξ}^0 és autoadjunt i positiu.
- iii) B_{ξ}^R és un operador normal.

Demostració

Per $\xi \in \mathbb{R} - \{0\}$, diem A_ξ de l'operador de $\mathcal{J}_\xi(-1,1)$ amb domini

$$H^2(-1,1)^2 \cap H_\xi(-1,1)$$

definit per

$$A_\xi(a, b) = P_\xi(-a'', -b'').$$

Sigui K l'operador que a $(f, g) \in L_2(-1,1)^2$ fa correspondre

$$(a, b) \in H^2(-1,1)^2 \cap H_0^1(-1,1)^2$$

tals que $-(a'', b'') = (f, g)$. És ben sabut que K és continu de

$$L_2(-1,1)^2 \text{ en } H^2(-1,1)^2.$$

K no és l'invers de A_ξ , car si $(f, g) \in \mathcal{J}_\xi(-1,1)$, no necessàriament (a, b) compleix $i\xi a + b' = 0$. Però sí que és cert que si $(f, g) \in \mathcal{J}_\xi(-1,1)$ aleshores

$$\frac{d^2}{dy^2} (i\xi a(y) + b'(y)) = \left(i\xi a'' + \frac{d}{dy} b''(y) \right) = - \left(i\xi f + \frac{d}{dy} g \right) = 0$$

i en conseqüència existeixen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tals que

$$i\xi a(y) + b'(y) = \alpha \frac{1}{\sqrt{2}} + \beta \sqrt{\frac{3}{2}} y$$

que d'acord amb l'ortonormalitat de

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ i } \sqrt{\frac{3}{2}} y$$

a $L_2(-1,1)$ fa que tinguem

$$\alpha = \int_{-1}^1 (i\xi a + b') \frac{2}{\sqrt{2}} dy, \quad \beta = \int_{-1}^1 (i\xi a + b') \sqrt{\frac{3}{2}} y dy$$

Modificarem K per a obtenir l'invers de A_ξ .

Considerem les "solucions particulars" següents:

$$\begin{aligned}(a_1, b_1) &= \left(\frac{-i}{\xi \sqrt{2}}, 0 \right) + \frac{i}{\xi \sqrt{2}} \frac{1}{\xi \operatorname{ch} \xi - \operatorname{sh} \xi} \cdot \\ &\quad \cdot (-\operatorname{sh} \xi + \xi \operatorname{ch}(\xi y), i \xi (\operatorname{sh} \xi) y - i \xi \operatorname{sh}(\xi y)) \\ (a_2, b_2) &= \left(\frac{-i}{\xi} \sqrt{\frac{3}{2}} y, 0 \right) + \frac{i}{\xi} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\xi \operatorname{sh} \xi} \cdot \\ &\quad \cdot (\xi \operatorname{sh}(\xi y), i \xi \operatorname{ch} \xi - i \xi \operatorname{ch}(\xi y))\end{aligned}$$

que compleixen les següents propietats:

$$a_j, b_j \in H^2(-1, 1) \cap H_0^1(-1, 1) \quad , \quad j = 1, 2$$

$$i \xi a_1 + b_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$i \xi a_2 + b_2' = \sqrt{\frac{3}{2}} y$$

$$-(a_j'', b_j'') = (i \xi p_j, p_j'), \quad \text{o sigui } P_\xi(-a_j'', -b_j'') = 0, \quad j = 1, 2, \quad \text{amb}$$

$$p_1 = \frac{i}{\xi \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\xi \operatorname{ch} \xi - \operatorname{sh} \xi} \cdot i \xi^2 \cdot \operatorname{ch}(\xi y)$$

$$p_2 = \frac{i}{\xi} \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\xi \operatorname{sh} \xi} \cdot i \xi^2 \cdot \operatorname{sh}(\xi y)$$

Usant això definim la projecció E de $H^2(-1, 1)^2$ per

$$\begin{aligned}E(a, b) &= (a, b) - \left[\int_{-1}^1 (i \xi a + b') \frac{1}{\sqrt{2}} dy \right] (a_1, b_1) - \\ &\quad - \left[\int_{-1}^1 (i \xi a + b') \sqrt{\frac{3}{2}} y dy \right] (a_2, b_2)\end{aligned}$$

Per construcció, és evident que $E \circ K$ restringit a $\mathring{J}_{\xi}(-1,1)$ compleix que el seu rang està efectivament a $H^2(-1,1)^2 \cap H_{\xi}(-1,1)$, i que $A_{\xi} \circ E \circ K$ és la identitat a $\mathring{J}_{\xi}(-1,1)$.

Notem que tenim per $(a, b), (c, d) \in H^2(-1,1)^2 \cap H_{\xi}(-1,1)$:

$$(A_{\xi}(a, b), (c, d))_{L_2(-1,1)^2} = \int_{-1}^1 (a' \bar{c}' + b' \bar{d}') dy \quad (1)$$

Prenent $(c, d) = (a, b)$ a la identitat (1) veiem que A_{ξ} no té nucli no trivial, i en conseqüència $E \circ K \circ A_{\xi}$ és la identitat a $\mathring{J}_{\xi}(-1,1)$. Per tant A_{ξ} té un invers continu, $E \circ K$, definit a tot $\mathring{J}_{\xi}(-1,1)$ i per això veiem que A_{ξ} és tancat. A més, l'invers és compacte, per raó de la compacitat de la inclusió

$$H^2(-1,1) \rightarrow L_2(-1,1).$$

Usant (1) hom veu que A_{ξ} és simètric i, en tenir com a rang tot $\mathring{J}_{\xi}(-1,1)$, és autoadjunt. També de (1) es dedueix que A_{ξ} és positiu, usant la desigualtat de Poincaré.

Resumint: A_{ξ} és autoadjunt, positiu i amb resolvent compacta. Com que

$$B_{\xi}^0 = A_{\xi} + \xi^2 I,$$

i ξ és real, el mateix és cert per a B_{ξ}^0 , i hem demostrat ii). Com que

$$B_{\xi}^R = B_{\xi}^0 + iR\xi I,$$

tenim que B_{ξ}^R és tancat amb resolvent compacta, o sigui que es compleix i).

L'afirmació iii) és ara evident: l'adjunt de $B_{\xi}^0 + iR\xi I$ és $B_{\xi}^0 - iR\xi I$, i òbviament commuten.

6.7. VALORS PROPIS DE B_{ξ}^R

De la forma de B_{ξ}^R deduïm que λ és un valor propi de B_{ξ}^R si i només si

$$\lambda - (\xi^2 + iR\xi)$$

és un valor propi de A_{ξ} (definit a 6.6). Així n'hi haurà prou amb trobar els valors propis de A_{ξ} , que són reals i estrictament positius, pel que ja hem vist.

Hem de trobar solucions no trivials de

$$-(a''(y), b''(y)) + (i\xi p(y), p'(y)) = \lambda (a(y), b(y))$$

per $(a, b) \in H^2(-1, 1)^2 \cap H_{\xi}(-1, 1)$, $p \in H^1(-1, 1)$. Prenent la "funció de corrent" $\psi(y)$ definida a 6.2 (1), tenim

$$(-\psi^{III}(y), i\xi\psi^{II}(y)) + (i\xi p(y), p'(y)) = \lambda (\psi^I(y), -i\xi\psi(y))$$

Derivant respecte a y la igualtat entre les primeres components, multiplicant per $i\xi$ la igualtat entre les segones i eliminant els termes $i\xi p'(y)$, això és equivalent a

$$-\psi^{IV}(y) + \xi^2 \psi^{II}(y) - \lambda (\psi^{II}(y) - \xi^2 \psi(y)) = 0 \quad (1)$$

$$\psi(-1) = \psi^I(-1) = \psi(1) = \psi^I(1) = 0 \quad (2)$$

que és el clàssic problema d'Orr-Sommerfeld.

Dient $f(y) = \psi^{II}(y) - \xi^2 \psi(y)$, (1) queda com

$$-f''(y) = \lambda f(y) \quad (3)$$

i usant la funció de Green de l'operador

$$\frac{d^2}{dy^2} - \xi^2 I$$

és fàcil de veure que les condicions (2) són equivalents a demanar que

$$\int_{-1}^1 f(y) e^{\xi y} dy = 0, \quad \int_{-1}^1 f(y) e^{-\xi y} dy = 0 \quad (4)$$

Com que λ és real i positiu diem $\mu = +\sqrt{\lambda}$ i de (3) deduïm que f té la forma

$$f(y) = \alpha e^{i\mu y} + \beta e^{-i\mu y} \quad (5)$$

(Això no seria cert en el cas $\mu = 0$). I les condicions (4) queden

$$\alpha \int_{-1}^1 e^{i\mu y} e^{\xi y} dy + \beta \int_{-1}^1 e^{-i\mu y} e^{\xi y} dy = 0$$

$$\alpha \int_{-1}^1 e^{i\mu y} e^{-\xi y} dy + \beta \int_{-1}^1 e^{-i\mu y} e^{-\xi y} dy = 0$$

Si aquest sistema ha de tenir una solució $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ cal que s'anul·li el determinant. Efectuant les integracions, el determinant del sistema és

$$4 \frac{\operatorname{sh}^2(\xi + i\mu)}{(\xi + i\mu)^2} - 4 \frac{\operatorname{sh}^2(\xi - i\mu)}{(\xi - i\mu)^2}.$$

Com que ξ i μ són reals, si diem $z = \xi + i\mu$ tenim que $\xi - i\mu = \bar{z}$, i per tant s'ha de complir que

$$0 = \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z^2} - \frac{\operatorname{sh}^2 \bar{z}}{\bar{z}^2} = \left(\frac{\operatorname{sh} z}{z} + \frac{\operatorname{sh} \bar{z}}{\bar{z}} \right) \left(\frac{\operatorname{sh} z}{z} - \frac{\operatorname{sh} \bar{z}}{\bar{z}} \right) \quad (6)$$

I com que $\operatorname{sh} \bar{z} = \overline{\operatorname{sh} z}$, en concloem que les solucions de (6) són els nombres complexos z tals que

$$\operatorname{Re} \frac{\operatorname{sh} z}{z} = 0 \quad \text{o bé} \quad \operatorname{Im} \frac{\operatorname{sh} z}{z} = 0.$$

D'aquests, els que tenen part real ξ donen lloc a valors propis de A_ξ , amb l'excepció dels de la forma $z = \xi + i \cdot 0$, que, bé que compleixin

$$\operatorname{Im} \frac{\operatorname{sh} z}{z} = 0,$$

són una solució que ens ha aparegut en prendre la forma (5) per a f , que ja hem dit que no valia en el cas $\mu = 0$. De fet, sabem que $\lambda = 0$ no és mai valor propi, ja que A_ξ és positiu (estrictament).

Resumint els resultats obtinguts i usant la proposició 6.6, tenim:

Teorema

Sigui $\xi \in \mathbb{R} - \{0\}$. L'espectre de B_ξ^R és purament puntual i consisteix en el conjunt imatge per l'aplicació $(x + iy) \rightarrow (x^2 + y^2 + iR_x)$ de

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = \xi, \operatorname{Im} z \neq 0, \left(\operatorname{Re} \frac{\operatorname{sh} z}{z} \right) \cdot \left(\operatorname{Im} \frac{\operatorname{sh} z}{z} \right) = 0\}.$$

6.8.

El conjunt

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \left(\operatorname{Re} \frac{\operatorname{sh} z}{z} \right) \left(\operatorname{Im} \frac{\operatorname{sh} z}{z} \right) = 0\}$$

té l'aspecte que apareix a la fig. 6.

D'aquest conjunt ens interessa fer notar que

- i) És simètric respecte als eixos $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 0$.
- ii) Està format pels eixos i per una família de corbes analítiques cadascuna d'elles compresa entre dues rectes de la forma $\operatorname{Im} z = n\pi/2$, $\operatorname{Im} z = (n+1)\pi/2$, n enter.
- iii) Cada corba és asimptòtica a la recta inferior corresponent.
- iv) La corba compresa a $n\pi/2 \leq \operatorname{Im} z \leq (n+1)\pi/2$, quan $\operatorname{Im} z \geq 0$, correspon a

$$\operatorname{Re} \frac{\operatorname{sh} z}{z} = 0$$

si n és senar, i a

$$\operatorname{Im} \frac{\operatorname{sh} z}{z} = 0$$

si n és parell.

- v) Els punts d'aquest conjunt compresos a $|\operatorname{Im} z| < \pi/2$ són només els corresponents als eixos.

Considerem ara per R fixat el conjunt

$$\bigcup_{\xi \in \mathbb{R} - \{0\}} \sigma(B_{\xi}^R).$$

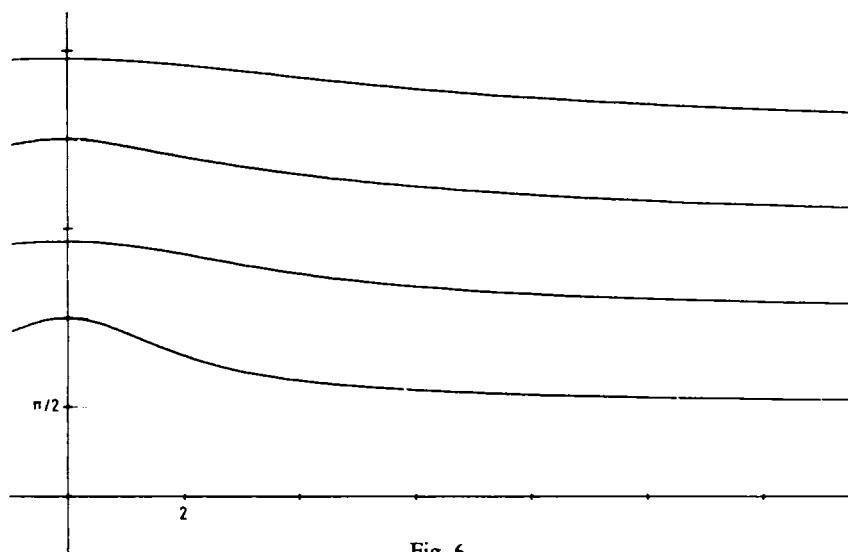


Fig. 6

Aquest conjunt s'obté aplicant la transformació $(x + iy) \rightarrow (x^2 + y^2 + iRx)$ al conjunt de la figura 6, exceptuant-ne els eixos. El que s'obté per $R = 1$ és representat a la figura 7, i els "forats" de la figura posen èmfasi en l'exclusió dels punts de $\operatorname{Re} z = 0$. Amb traçat fi hi ha les paràboles a les quals són asimptòtiques les diferents corbes.

Aquest conjunt varia amb R simplement ampliant-se en la direcció vertical. En particular, en el cas $R = 0$ el conjunt s'acumula sobre l'eix real.

Anomenem Σ_R la clausura de

$$\bigcup_{\xi \in \mathbb{R} - \{0\}} \sigma(B_{\xi}^R).$$

(o sigui, el de la figura 7 amb els "forats" tapats).

És important notar que l'ímfim de les parts reals dels punts de Σ_R no varia amb R . Aquest ímfim serà important tenir-lo fixat ja que demostrarem que és precisament C^{-2} . Diguem-ne de moment γ . Tenim que

$$\gamma = \inf \left\{ |z|^2 \mid \operatorname{Re} \frac{shz}{z} = 0 \right\}$$

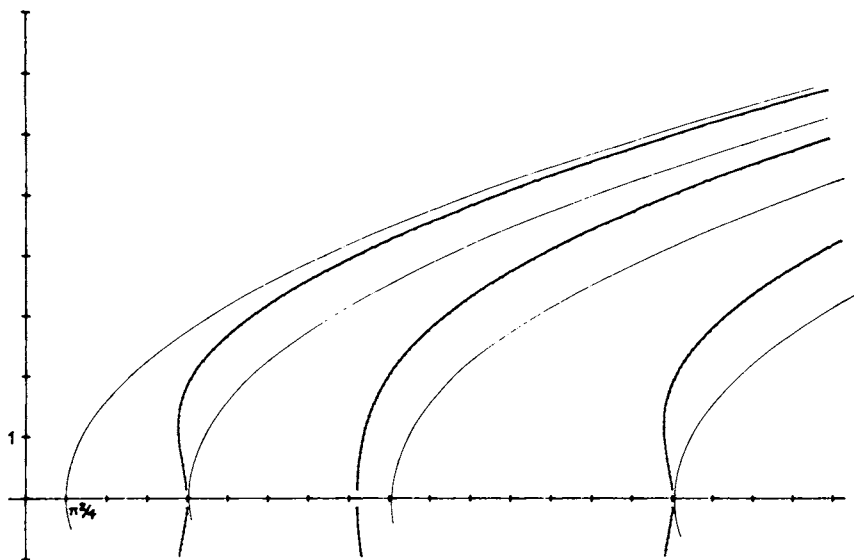


Fig. 7

ja que l'ínfim s'assoleix sobre una corba

$$\operatorname{Re} \frac{\operatorname{sh} z}{z} = 0.$$

Es tracta doncs de trobar l'ínfim dels valors de la funció $x^2 + y^2$ de $\mathbb{R}^2$, subjecta a la restricció $(x \cos y \operatorname{sh} x + y \sin y \operatorname{ch} x) / (x^2 + y^2) = 0$. Amb el mètode del multiplicador de Lagrange s'obté $\gamma = x^2 + y^2$ on x és la solució (única en valor absolut) de l'equació $x - \operatorname{ctgh} x = 0$, i y la solució de menor valor absolut de $y + \operatorname{ctg} y = 0$. S'obté:

$$\gamma \approx 9.270193297$$

6.9. LEMA

Fixem $R \in \mathbb{R}$ qualsevol. Donat $\lambda \in \mathbb{C}$ es compleix que el conjunt

$$\{\xi \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \lambda \in \sigma(B_\xi^R)\}$$

sempre és finit.

Demostració

Per raons d'analiticitat hom veu immediatament que la intersecció entre els conjunts

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \frac{\operatorname{sh} z}{z} = 0\} \quad \text{o} \quad \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \frac{\operatorname{sh} z}{z} = 0\}$$

i el conjunt $\{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = \operatorname{Re} \lambda\}$ consisteix sempre en un nombre finit de punts. D'aquí se segueix el Lema, d'acord amb el Teorema de 6.7.

6.10. LEMA

Sigui $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \notin \Sigma_R$, i siguin $\xi \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\phi \in D(B_\xi^R)$. Aleshores

$$\|(B_\xi^R - \lambda I)\phi\|_{L_2(-1,1)^2} \geq \operatorname{dist}(\lambda, \Sigma_R) \|\phi\|_{L_2(-1,1)^2}$$

Demostració

La desigualtat és certa ja que es compleix substituint $\operatorname{dist}(\lambda, \Sigma_R)$ per la quantitat més gran $\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(B_\xi^R))$. Que es compleixi amb aquesta segona quantitat és conseqüència del fet que B_ξ^R és normal (vegeu la demostració a Kato (1966), p. 277), com hem vist a la proposició 6.6 iii).

6.11. TRANSFORMADA DE FOURIER EN LA DIRECCIÓ DE x

Definim $S_x(Q)$, l'espai de les funcions de decreixement ràpid en la direcció de x del canal Q , com el format per les funcions $f \in C^\infty(Q)$ per a les quals

$$\sup_{\alpha \in \{0, 1, \dots, N\}^2} \sup_{(x, y) \in Q} (1 + x^2)^N |D^\alpha f(x, y)| < \infty, \text{ per tot } N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

La transformada de Fourier en la direcció de x de $f \in S_x(Q)$ és la funció $\hat{f}$ donada també sobre Q per la fórmula

$$\hat{f}(\xi, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i\xi x} dx$$

6.12. PROPOSICIÓ

Si $f \in S_x(Q)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^2$, i $p(x)$ és un polinomi, aleshores

$$\text{i) } D^\alpha f \in S_x(Q)$$

$$\text{ii) } p(x)f \in S_x(Q)$$

$$\text{iii) } (D^\alpha f)^\wedge = (i\xi)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^{\alpha_2} \hat{f}(\xi, y)$$

$$\text{iv) } D^\alpha \hat{f} = [(-ix)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^{\alpha_2} f(x, y)]^\wedge$$

$$\text{v) } \hat{f} \in S_x(Q)$$

$$\text{vi) } f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi, y) e^{i\xi x} d\xi$$

$$\text{vii) } \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \bar{g}(x, y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi, y) \bar{\hat{g}}(\xi, y) d\xi, \forall y \in (-1, 1),$$

$$\text{si } g \in S_x(Q)$$

$$\text{viii) } f \rightarrow \hat{f} \text{ és una bijecció de } S_x(Q) \text{ en ell mateix.}$$

Demostració

Aquests resultats es proven de manera similar que per a la transformada de Fourier habitual (vegeu, p. ex., Rudin (1973), cap. 7). De fet i), ii) són immediats, vi), vii) valen, ja que per cada y , $f(x, y)$ és una funció de decreixement ràpid de $\mathbb{R}$ i $\hat{f}(x, y)$ la seva transformada de Fourier habitual a $\mathbb{R}$. v) se segueix de iii) i iv), els quals es demostren derivant sota el signe d'integral. Usant iii), iv) i vi) es demostra viii).

6.13. TEOREMA (DE PLANCHEREL)

La transformada de Fourier en la direcció de x s'estén de manera única a una isometria de $L_2(Q)$ en ell mateix (que indicarem també $f \rightarrow \hat{f}$).

Demostració

És conseqüència del fet que $S_x(Q) \subset L_2(Q)$ densament, i de la Proposició anterior.

6.14. PROPOSICIÓ (IMATGE DELS ESPAIS DE SOBOLEV)

$f \in H^s(Q) \Leftrightarrow \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^2$ amb $\alpha_1 + \alpha_2 \leq s$ es compleix que $\hat{f}$ és derivable a L_2 α_2 vegades respecte a y i que

$$|\xi|^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^{\alpha_1} \hat{f}(\xi, y) \in L_2(Q).$$

A més es compleix que

$$(i\xi)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^{\alpha_2} \hat{f} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^{\alpha_2} f \right]^\wedge.$$

(Indicarem amb $\hat{H}^s(Q)$ l'espai de les transformades de Fourier de les funcions de $H^s(Q)$).

Demostració

Com que Q té la propietat del segment (vegeu Adams (1975), p. 54), $H^s(Q)$ és la clausura en la norma de H^s de les restriccions a Q de les funcions de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Com que aquestes restriccions estan a $S_x(Q)$ i $S_x(Q) \subset H^s(Q)$, tenim que $H^s(Q)$ és la clausura de $S_x(Q)$. L'enunciat se segueix aleshores de les propietats de $S_x(Q)$ donades a 6.12.

6.15.

Donada f de Q en $\mathbb{C}$, indicarem amb $f_\xi(y)$ la funció de $(-1, 1)$ en $\mathbb{C}$ definida per

$$f_\xi(y) = f(\xi, y).$$

D'acord amb el Teorema de Fubini, si $f \in L_2(Q)$ aleshores

$$f_\xi \in L_2(-1, 1) \text{ p.p. } \xi \in \mathbb{R}.$$

Usant també el Teorema de Fubini i altres resultats ben coneguts de teoria de la integració hom obté el següent

Lema

Siguin $f, f_n \in L_2(Q)$, $n \in \mathbb{N}$, de manera que $f_n \rightarrow f$ a $L_2(Q)$. Aleshores p.p. $\xi \in \mathbb{R}$ $(f_n)_\xi, f_\xi \in L_2(-1,1)$ i $(f_n)_\xi \rightarrow f_\xi$ a $L_2(-1,1)$.

6.16. PROPOSICIÓ

Si $f \in H^s(Q)$, aleshores p.p. $\xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}_\xi \in H^s(-1,1)$ i, amb $0 \leq r \leq s$,

$$\left(\frac{d}{dy} \right)^r \hat{f}_\xi = \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^r \hat{f} \right]_\xi.$$

Demostració

Ho veurem per $s = 1$. El cas general segueix per iteració. Com hem dit a la demostració de 6.14, si $f \in H^1(Q)$ existeix una successió $f_n \in S_x(Q)$ tal que

$$\hat{f}_n \rightarrow \hat{f} \text{ i } \frac{\partial}{\partial y} \hat{f}_n \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \hat{f} \text{ a } L_2(Q).$$

Aplicant el Lema anterior tenim que

$$\text{p.p. } \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}_\xi \text{ i } \left(\frac{\partial}{\partial y} \hat{f} \right)_\xi$$

són a $L_2(-1,1)$ i que

$$(\hat{f}_n)_\xi \rightarrow \hat{f}_\xi \text{ i } \left(\frac{\partial}{\partial y} \hat{f}_n \right)_\xi \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial y} \hat{f} \right)_\xi$$

a $L_2(-1,1)$.

Però com que $\hat{f}_n \in S_x(Q)$ tenim que

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} \hat{f}_n \right)_\xi = \frac{d}{dy} (\hat{f}_n)_\xi.$$

Per tant

$$(\hat{f}_n)_\xi \rightarrow \hat{f}_\xi \quad \text{i} \quad \frac{d}{dy} (\hat{f}_n)_\xi \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial y} \hat{f} \right)_\xi$$

a $L_2(-1,1)$. O sigui que

$$\hat{f}_\xi \in H^1(-1,1) \quad \text{i} \quad \frac{d}{dy} \hat{f}_\xi = \left(\frac{\partial}{\partial y} \hat{f} \right)_\xi.$$

6.17.

Donat $u = (u_1, u_2) \in L_2(Q)^2$, posem $\hat{u}_1 = (\hat{u}_1, \hat{u}_2)$.

Teorema

Siguin $\mathring{J}_\xi(-1,1)$, $H_\xi(-1,1)$ i $G_\xi(-1,1)$ els espais definits a 6.2, a 6.5 i a 6.3 respectivament. Es compleix

- i) Si $u \in \mathring{J}(Q)$, aleshores $\hat{u}_\xi \in \mathring{J}_\xi(-1,1)$ p.p. $\xi \in \mathbb{R}$
- ii) Si $u \in H(Q)$, aleshores $\hat{u}_\xi \in H_\xi(-1,1)$ p.p. $\xi \in \mathbb{R}$
- iii) Si $u \in G(Q)$, aleshores $\hat{u}_\xi \in G_\xi(-1,1)$ p.p. $\xi \in \mathbb{R}$.

(Com que les afirmacions són p.p. ξ no hi fa res que amb $\xi = 0$ els espais no estiguin definits).

Demostració

Part i). Per la definició de $\mathring{J}(Q)$ existeix una successió $\phi^{(n)} \in \mathring{J}(Q)$ tal que $\phi^{(n)} \rightarrow u$ a $L_2(Q)^2$. Per tant $\hat{\phi}_1^{(n)} \rightarrow \hat{u}_1$ i $\hat{\phi}_2^{(n)} \rightarrow \hat{u}_2$ a $L_2(Q)$. Pel Lema 5.15 es compleix que p.p. $\xi \in \mathbb{R}$ $(\hat{u}_1)_\xi, (\hat{u}_2)_\xi \in L_2(-1,1)$, i que

$$(\hat{\phi}_1^{(n)})_\phi \rightarrow (\hat{u}_1)_\xi \quad \text{i} \quad (\hat{\phi}_2^{(n)})_\xi \rightarrow (\hat{u}_2)_\xi.$$

Però notem que, com que

$$i\xi\hat{\phi}_1^{(n)} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\phi}_2^{(n)} = 0,$$

tenim que

$$\frac{d}{dy} (\hat{\phi}_2^{(n)})_\xi = \left(\frac{\partial}{\partial y} \hat{\phi}_2^{(n)} \right)_\xi = -i\xi (\hat{\phi}_1^{(n)})_\xi,$$

d'on deduïm que

$$\frac{d}{dy} (\hat{\phi}_2^{(n)})_\xi$$

convergeix a $-i\xi (\hat{u}_1)_\xi$. En conseqüència

$$(\hat{u}_2)_\xi \in H^1(-1,1) \quad \text{i} \quad \frac{d}{dy} (\hat{u}_2)_\xi = -i\xi (\hat{u}_1)_\xi.$$

A més, com que les $\phi_2^{(n)}$ tenen suport compacte, de la fórmula de la transformada de Fourier de $\phi_2^{(n)}$ deduïm que les $(\phi_2^{(n)})_\xi$ són de $C_0^\infty(-1,1)$, bé que les $\phi_2^{(n)}$ no tinguin suport compacte a Q . Per tant $(\hat{u}_2)_\xi$ és límit en la norma de $H^1(-1,1)$ de funcions de $C_0^\infty(-1,1)$. Per tant $(\hat{u}_2)_\xi \in H_0^1(-1,1)$.

Part ii). S'aplica un raonament similar al de la part i) a una successió $\phi^{(n)} \in \mathcal{J}(Q)$ tal que $\phi^{(n)} \rightarrow u$ a $H^1(Q)^2$.

Part iii). Veurem en primer lloc que

$$\frac{\partial}{\partial y} \hat{u}_1 = i\xi \hat{u}_2,$$

en sentit distribucional. Sigui $\phi \in C_0^\infty(Q)$: ϕ és la transformada de Fourier en la direcció de x d'una funció $\psi \in S_x(Q)$ que val zero en un entorn de ∂Q de la forma

$$\{ (x, y) \mid 1 - \varepsilon < |y| < 1 \}$$

per $\varepsilon > 0$, com es veu usant la fórmula d'inversió. És fàcil de veure aleshores que

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \in \mathcal{J}(Q).$$

Per tant tenim que

$$\left(u, \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right)_{L_2(Q)^2} = 0$$

és a dir que:

$$\int_Q \hat{u}_1 \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} d\xi dy = - \int_Q \hat{u}_2 i \xi \bar{\phi} d\xi dy \quad \forall \phi \in C_0^\infty(Q)$$

Així doncs, $\frac{\partial}{\partial y} \hat{u}_1 = i \phi \hat{u}_2$. Però com que $i \xi \hat{u}_2$ no està necessàriament a $L_2(Q)$, multipliquem $\hat{u}_1$ per una funció real de variable real $f(\xi)$, escollida de manera que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f(\xi) > 0 \forall \xi$, $f(\xi) = |\xi|^{-1}$ per $|\xi| \geq 1$. Aleshores tenim que $f(\xi) \hat{u}_1 \in L_2(Q)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(\xi) \hat{u}_1 = i \xi f(\xi) \hat{u}_2 \in L_2(Q)$, i que $|\xi| f(\xi) \hat{u}_1 \in L_2(Q)$. Aleshores per la Proposició 6.14 tenim que $f(\xi) \hat{u}_1 \in \hat{H}^1(Q)$, i com a conseqüència de la Proposició 6.16, p.p. $\xi \in \mathbb{R}$, $f(\xi)(\hat{u}_1)_\xi \in H^1(-1,1)$ i

$$\frac{d}{dy} f(\xi)(\hat{u}_1)_\xi = [i \xi f(\xi) \hat{u}_2]_\xi = i \xi f(\xi)(\hat{u}_2)_\xi.$$

Com que $f(\xi) \neq 0 \forall \xi$, en concloem que p.p. $\xi \in \mathbb{R}$, $(\hat{u}_1)_\xi, (\hat{u}_2)_\xi \in L_2(-1,1)$ i $\frac{d}{dy} (\hat{u}_1)_\xi = (\hat{u}_2)_\xi$. Però per la caracterització de $G_\xi(-1,1)$ feta a 6.3 això vol dir que $((\hat{u}_1)_\xi, (\hat{u}_2)_\xi) \in G_\xi(-1,1)$.

6.18. COROL·LARI

Si $u \in L_2(Q)^2$ i $u = v + \text{grad } p$ amb $v \in \mathring{J}(Q)$ i $\text{grad } p \in G(Q)$, aleshores p.p. $\xi \in \mathbb{R}$, $\hat{v}_\xi = P_\xi(\hat{u}_\xi)$.

Demostració.

Pel Teorema anterior sabem que p.p. $\xi \in \mathbb{R}$, $\hat{v}_\xi \in \mathring{J}_\xi(-1,1)$, $(\text{grad } p)_\xi \in G_\xi(-1,1)$, $\hat{u}_\xi \in L_2(-1,1)^2$ i $\hat{u}_\xi = \hat{v}_\xi + (\text{grad } p)_\xi$. El corol·lari se segueix de la unicitat de la descomposició.

6.19. TEOREMA

Sigui B_R l'operador de $\mathring{J}(Q)$ definit a 5.2 i B_ξ^R els operadors definits a 6.5. Sigui $u \in D(B_R)$, $f \in \mathring{J}(Q)$ i $\lambda \in \mathbb{C}$, i suposem que $B_R u - \lambda u = f$.

Aleshores, p.p. $\xi \in \mathbb{R}$

$$\hat{f}_\xi = (B_\xi^R - \lambda I) \hat{u}_\xi \quad (1)$$

Demostració

Recordem que $D(B_R) = H^2(Q)^2 \cap H(Q)$. Pel Teorema 6.19 i la Proposició 6.16, tenim que p.p. $\xi \in \mathbb{R}$ $\hat{f}_\xi \in \mathring{J}_\xi(-1,1)$ i $\hat{u}_\xi \in D(B_\xi^R) = H^2(-1,1)^2 \cap H_\xi(-1,1)$. Per tant l'expressió (1) té sentit.

Sigui $g \in L_2(Q)^2$ definida per $g = -\Delta u + R \frac{\partial}{\partial x} u - \lambda u$. Es compleix que $f = P(g)$ i que

$$\hat{g} = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{u}(\xi, y) + (\xi^2 + iR\xi - \lambda) \hat{u}(\xi, y).$$

Pel corol·lari 6.18 tenim que p.p. $\xi \in \mathbb{R}$

$$\hat{f}_\xi = P_\xi(\hat{g}_\xi) = P_\xi\left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{u}_\xi\right) + (\xi^2 + iR\xi - \lambda) \hat{u}_\xi = (B_\xi^R - \lambda I) \hat{u}_\xi$$

(excloent-ne potser, a més, el valor $\xi = 0$).

6.20. TEOREMA

L'operador B_R de $\mathring{J}(Q)$ no té valors propis ni espectre residual. El seu espectre és purament continu i consisteix en el conjunt Σ_R , definit a 6.8 com la clausura de $\bigcup_{\xi \in \mathbb{R} - \{0\}} \sigma(B_\xi^R)$.

Demostració

B_R és un operador tancat de $\mathring{J}(Q)$, densament definit. Aleshores tenim les següents possibilitats, mútualment excloents i totals, per $\lambda \in \mathbb{C}$:

- i) $B_R - \lambda I$ no és injectiu.
- ii) $B_R - \lambda I$ és injectiu i la clausura del seu rang no és tot $\mathring{J}(Q)$.
- iii) $B_R - \lambda I$ és injectiu i el seu rang és dens a $\mathring{J}(Q)$, però no és tot $\mathring{J}(Q)$.
- iv) $B_R - \lambda I$ és invertible amb continuïtat.

(El Teorema de la Gràfica Tancada és el que ens assegura que si no es compleixen i), ii) o iii), necessàriament es compleix iv).

Vegem que el cas i) no es dona mai (espectre puntual).

Si $B_R u = \lambda u$ per $u \in D(B_R)$, $u \neq 0$, aleshores p.p. $\xi \in \mathbb{R}$, $B_\xi^R \hat{u}_\xi = \lambda \hat{u}_\xi$, i $\hat{u}_\xi \neq 0$ per $\xi \in A \subset \mathbb{R}$ amb mesura de A diferent de zero. Aleshores tindriem que $\forall \xi \in A$, $\lambda \in \sigma(B_\xi^R)$, i això és impossible si la mesura de A és diferent de zero pel Lema 6.9.

El cas ii) també es impossible: efectivament, si la clausura del rang de $B_R - \lambda I$ no és tot $\dot{\int}(Q)$, aleshores necessàriament tindria nucli l'adjunt de l'operador $B_R - \lambda I$, que pel Lema 5.5 és $B_{-R} - \bar{\lambda}I$. Però per a ell val el que ja hem dit, i no pot tenir nucli.

Per tant estem en la dicotomia iii) o iv). En qualsevol dels dos casos $(B_R - \lambda I)^{-1}$ està definit de $\text{Rg}(B_R - \lambda I)$ en $\dot{\int}(Q)$ (densament definit, per tant) i és tancat com a operador de $\dot{\int}(Q)$ en $\dot{\int}(Q)$. Com que un operador tancat i amb domini dens si és continu ha de tenir com a domini tot l'espai, una manera de distingir si estem en el cas iii) o en el iv) és la següent:

En el cas iv) ha d'existir una constant $K > 0$ tal que

$$\|(B_R - \lambda I)u\|_{L_2(Q)^2} \geq K \|u\|_{L_2(Q)^2} \quad \forall u \in D(B_R),$$

en canvi, en el cas iii) ha d'existir una successió $u_n \in D(B_R)$ amb $\|u_n\|_{L_2(Q)} = 1$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(B_R - \lambda I)u_n\|_{L_2(Q)^2} = 0.$$

Vegem que si $\lambda \in \mathbb{C} - \Sigma_R$ estem en el cas iv), o sigui $\lambda \in \rho(B_R)$. Prenuem $K = \text{dist}(\lambda, \Sigma_R)$, sigui $u \in D(B_R)$ i diguem $f = B_R u - \lambda u$. Com a conseqüència del Teorema 6.19, tenim

$$\hat{f}_\xi = (B_\xi^R - \lambda I) \hat{u}_\xi \quad \text{p.p. } \xi \in \mathbb{R}.$$

Apliquem ara el Lema 6.10. Tenim:

$$\|\hat{f}_\xi\|_{L_2(-1,1)^2}^2 \geq K^2 \|\hat{u}_\xi\|_{L_2(-1,1)^2}^2 \quad \text{p.p. } \xi \in \mathbb{R}.$$

Integrant ara aquesta desigualtat respecte a ξ , usant el Teorema de Fubini i usant que la transformada de Fourier en la direcció de x és una isometria, en concloem que

$$\|f\|_{L_2(Q)^2}^2 \geq K^2 \|u\|_{L_2(Q)^2}^2$$

que demostra que $\lambda \in \rho(B_R)$.

Finalment veurem que si $\lambda \in \bigcup_{\xi \in \mathbb{R} - \{0\}} \sigma(B_\xi^R)$, aleshores estem en el cas iii). Amb això haurem acabat, ja que l'espectre és un conjunt tancat i per tant

tots els punts de Σ_R hauran d'estar a l'espectre de B_R (necessàriament a l'espectre continu, ja que de puntual o residual no n'hi ha).

Per a demostrar-ho usarem el Lema següent, que demostrarem més avall.

Lema

Donat $\lambda \in \sigma(B_R)$, amb $\eta \neq 0$, $\exists u \in D(B_R)$ tal que

- 1) $\hat{u}(\xi, y) = 0$ per $|\xi - \eta| \geq |\eta|/2$.
- 2) $\xi \rightarrow \hat{u}_\xi(y)$ és una aplicació contínua de $\mathbb{R}$ en $H^2(-1,1)^2$ tal que $\hat{u}_\xi \in D(B_\xi^R) \quad \forall \xi \neq 0$.
- 3) $\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ es compleix que $\phi(\xi) \hat{u}(\xi, y) \in [D(B_R)]^\wedge$.
- 4) $B_\eta^R \hat{u}_\eta = \lambda \hat{u}_\eta$ amb $\hat{u}_\eta \neq 0$.

Suposant-lo demostrat, prenguem la $u \in D(B_R)$ que ens dóna i diguem $f_1(\xi) = \|\hat{u}_\xi(y)\|_{L_x(-1,1)^2}$. Sabem que f_1 és contínua i que $f_1(\eta) \neq 0$. Diguem $f_2(\xi) = \|(B_\xi^R - \lambda I) \hat{u}_\xi\|_{L_x(-1,1)^2}$. Sabem que f_2 és contínua per 1), per 2) i pel Corol·lari de 6.5. Sabem també que $f_2(\eta) \neq 0$.

Prenguem $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ amb $\phi(\eta) \neq 0$ i definim $\hat{v}(\xi, y) = \phi(\xi) \hat{u}(\xi, y)$. D'acord amb la propietat 3) $\hat{v}$ és la transformada de Fourier en la direcció de x d'un camp $v \in D(B_R)$. Tenim que

$$\begin{aligned} \|v\|_{L_x(Q)^2}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(\xi)|^2 f_1(\xi)^2 d\xi \\ \|(B_R - \lambda I)v\|_{L_x(Q)^2}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(\xi)|^2 f_2(\xi)^2 d\xi \end{aligned}$$

Com que $v \neq 0$, ja que $\phi(\eta) \neq 0$, podem prendre el quocient

$$\frac{\|(B_R - \lambda I)v\|_{L_x(Q)^2}^2}{\|v\|_{L_x(Q)^2}^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(\xi)|^2 f_2(\xi)^2 d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(\xi)|^2 f_1(\xi)^2 d\xi}$$

i és obvi que aquest quocient pot ésser tan petit com vulguem, sense fer $v = 0$, car f_1 i f_2 són contínues i $f_2(\eta) = 0$, $f_1(\eta) \neq 0$: n'hi ha prou amb prendre el suport de ϕ prou a prop de η . Això ens permet de construir una successió $u_n \in D(B_R)$ amb $\|u_n\|_{L_x(Q)^2} = 1$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(B_R - \lambda I)u_n\|_{L_x(Q)^2}^2 = 0$$

que ens prova que λ està en el cas iii).

6.21. DEMOSTRACIÓ DEL LEMA

Donat $\lambda \in \sigma(B_\eta^R)$, amb $\eta \neq 0$, sigui $(a, b) \in D(B_\eta^R)$, $(a, b) \neq (0, 0)$, tal que $B_\eta^R(a, b) = \lambda(a, b)$. Com que $\eta \neq 0$ podem definir

$$\hat{u}(\xi, y) = (f(\xi)a(y), \frac{\xi}{\eta} f(\xi)b(y))$$

amb $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $f(\eta) \neq 0$ i $f(\xi) = 0$ per $|\xi - \eta| \geq |\eta|/2$.

És clar que es compleixen 1), 2) i 4) per construcció. Per a veure 3) veurem que $\hat{u} \in [D(B_R)]^\wedge$ i el mateix raonament valdrà per a $\phi(\xi)\hat{u}(\xi, y)$ considerant $\phi(\xi)f(\xi)$ en lloc de $f(\xi)$.

Sabem que $[D(B_R)]^\wedge = \hat{H}^2(Q)^2 \cap \hat{H}(Q)$. És clar que $\hat{u} \in \hat{H}^2(Q)^2$ per la Proposició 6.14, i també que $\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial y} + i\xi \hat{u}_1 = 0$. L'únic que ens resta veure és que $\hat{u}_1, \hat{u}_2 \in \hat{H}_0^1(Q)$. Vegem-ho per $\hat{u}_1$, i per $\hat{u}_2$ es veu igual.

Sabem que $(a, b) \in H_0^1(-1, 1)^2$. Per tant $a \in H_0^1(-1, 1)$ i existeix una successió $a_n(y) \in C_0^\infty(-1, 1)$ tal que convergeix a $a(y)$ en la norma de $H^1(-1, 1)$. Aleshores $f(\xi)a_n(y)$ és una successió de funcions de $C_0^\infty(Q)$ (i per tant de $\hat{H}_0^1(Q)$), com es veu fàcilment) que convergeixen a $\hat{u}_1(\xi, y) = f(\xi)a(y)$ en la norma $\hat{H}^1(Q)$:

$$\begin{aligned} \|f(\xi)a(y) - f(\xi)a_n(y)\|_{\hat{H}^1(Q)}^2 &= \|f(\xi)(a'(y) - a'_n(y))\|_{L_2(Q)}^2 + \\ &+ \|(1 + \xi^2)f(\xi)(a(y) - a_n(y))\|_{L_2(Q)}^2 = \|f(\xi)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \|a'(y) - a'_n(y)\|_{L_2(-1, 1)}^2 + \\ &+ \|(1 + \xi^2)f(\xi)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \|a(y) - a_n(y)\|_{L_2(-1, 1)}^2 \end{aligned}$$

i això tendeix a zero, ja que $f(\xi)$ té suport compacte.

6.22. TEOREMA

Segui $\Omega = Q - S$. Aleshores

$$C^{-2} = \inf_{u \neq 0} \frac{\|u\|_{H(\Omega)}^2}{\|u\|_{L_2(\Omega)}^2}$$

no depèn de S (afitat) i $C^{-2} = \gamma$, on γ és la constant obtinguda a 6.8.

Demostració

Vegem primer que l'ímfim és el mateix si posem Ω que si posem Q . Diaguem-ne en un cas γ_Ω i en l'altre γ_Q . Com que $J(\Omega)$ és dens a $H(\Omega)$ i el funcional del qual busquem l'ímfim és continu a $H(\Omega)$, n'hi ha prou amb trobar l'ímfim per $u \in J(\Omega)$. Com que $J(\Omega) \in J(Q)$, és clar que $\gamma_Q \leq \gamma_\Omega$. Però també és cert que $\gamma_\Omega \leq \gamma_Q$ ja que també a Q n'hi ha prou amb minimitzar sobre $J(Q)$ i donat $u \in J(Q)$, podem considerar el traslladat de u , $v(x, y) = u(x + \alpha, y)$ per $\alpha \in \mathbb{R}$ i com que u té suport compacte, per α prou gran $\alpha \in J(\Omega)$, i és evident que el funcional pren el mateix valor sobre v que sobre u .

Per això n'hi ha prou calculant l'ímfim a Q .

Com que $H^2(Q)^2 \cap H(Q)$ és dens a $H(Q)$, n'hi ha prou amb trobar l'ímfim per $u \in H^2(Q)^2 \cap H(Q)$, que és el domini de l'operador de Stokes A . Per $u \in D(A)$ es compleix que $\|u\|_{H(\Omega)}^2 = (Au, u)_{L_2(\Omega)^2}$, i per tant el que volem calcular és l'ímfim del rang numèric de A . Però com que A és autoadjunt i afitat inferiorment l'ímfim del seu rang numèric coincideix amb l'ímfim del seu espectre (KATO (1966), p. 278). I l'ímfim de l'espectre de A és l'ímfim de Σ_0 , que a 6.8 hem calculat i n'hem dit γ . Hem vist que $\gamma \approx 9.270193297$.

6.23. LEMA

Mirem-nos l'espai $D(A) = H^2(Q)^2 \cap H(Q)$ com a subespai tancat de $H^2(Q)^2$ i considerem el subespai auxiliar

$$F_x = \{u \in D(A) \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } u(x, y) = 0 \text{ pp } (x, y) \text{ si } |x| > n\}.$$

Afirmem que F_x és dens a $D(A)$.

Demostració

Sigui $u \in D(A)$. Tenim que les components de u són uniformement contínues a Q (ADAMS (1975), p. 98) (de fet, uniformement Hölder contínues) i podem definir directament la funció de corrent

$$\psi(x, y) = \int_{(0, -1)}^{(x, y)} -u_2 \, dx + u_1 \, dy$$

Pel mateix raonament que al Lema 2.2, $\psi(x, y) = 0$ si $|y| = 1$. De la desigualtat de Poincaré deduíem que $\psi \in L_2(Q)$ i per tant $\psi \in H^3(Q)$. Siguin ara $f_n(x)$ funcions de $C^\infty(\mathbb{R})$ com les del Lema 2.2 i considerem $\psi_n(x, y) = f_n(x) \psi(x, y)$. Definim

$$u^{(n)}(x, y) = \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial y}, -\frac{\partial \psi_n}{\partial x} \right) = (f_n(x) u_1(x, y), f_n(x) u_2(x, y) - f'_n(x) \psi(x, y))$$

Tenim que $u^{(n)} \in F_x$ i que $u^{(n)}$ tendeix a u en la norma de $H^2(Q)^2$, com demostra una computació immediata.

6.24. TEOREMA

Sigui A_u l'operador "complet" definit a 4.11 per a un cert nombre de Reynolds R i una certa solució estacionària de la forma $(R, 0) - \bar{b} + u$ per $u \in H^2(\Omega)^2 \cap H(\Omega)$. Afirmem que $\Sigma_R \subset \sigma_E(A_u)$.

(Noteu que el que diem és cert a $\Omega = Q - S$ i no només en el cas sense obstacle).

Demostració

Notem que és suficient demostrar que $\Sigma_R \subset \sigma(A_u)$, ja que els punts Σ_R no són aïllats i necessàriament estaran a l'espectre essencial.

Considerem l'operador d'Oseen B_R a $\mathcal{J}(Q)$, i sigui $\lambda \in \Sigma_R$. Com que λ és de l'espectre continu de B_R , necessàriament

$$\inf_{\substack{u \in D(B_R) \\ \|u\|_{L_2(Q)^2} = 1}} \|B_R u - \lambda u\|_{L_2(Q)^2} = 0$$

i com que $B_R - \lambda I$ és un operador continu de $H^2(Q)^2 \cap H(Q)$ en $\mathcal{J}(Q)$, pel Lema anterior existeix una successió $v_n \in F_x$ tal que

$$\|v_n\|_{L_2(Q)^2} = 1, \quad \|B_R v_n - \lambda v_n\|_{L_2(Q)^2} < \frac{1}{n} \quad (1)$$

Donat cadascun d'aquests v_n considerem $v_n^\alpha(x, y) = v_n(x + \alpha, y)$ per $\alpha \in \mathbb{R}$. Per tot $\alpha \in \mathbb{R}$, v_n^α també compleix (1).

D'altra banda, sigui P la projecció ortogonal de $L_2(Q)^2$ en $\mathcal{J}(Q)$ i P' la projecció ortogonal de $L_2(\Omega)^2$ en $\mathcal{J}(\Omega)$. Sigui $r: L_2(Q)^2 \rightarrow L_2(\Omega)^2$ la restricció natural i $i_e: L_2(\Omega)^2 \rightarrow L_2(Q)^2$ l'extensió per zero fora de Ω . Com que $\Omega \subset Q$ és fàcil veure que $P' = P' \circ r \circ P \circ i_e$, ja que $r(G(Q)) \subset G(\Omega)$.

Diguem $w_n^\alpha = r(v_n^\alpha)$. Si $|\alpha|$ és prou gran tenim que

$$w_n^\alpha \in H^2(\Omega)^2 \cap H(\Omega) = D(A_u).$$

També que $e(w_n^\alpha) = v_n^\alpha$, i que la mateixa propietat la compleixen les derivades de w_n^α i les de v_n^α . Tenim:

$$A_u w_n^\alpha - \lambda w_n^\alpha = P'(-\Delta w_n^\alpha + R \frac{\partial}{\partial x} w_n^\alpha - \lambda w_n^\alpha) + \\ + P'(< -R \vec{b} + u, \nabla > w_n^\alpha + < w_n^\alpha, \nabla > (-R \vec{b} + u))$$

$$\|P'(-\Delta w_n^\alpha + R \frac{\partial}{\partial x} w_n^\alpha - \lambda w_n^\alpha)\|_{L_2(\Omega)^2} = \|(P' \circ P \circ e)(-\Delta w_n^\alpha + \\ + R \frac{\partial}{\partial x} w_n^\alpha - \lambda w_n^\alpha)\|_{L_2(\Omega)^2} \leq \|P(-\Delta v_n^\alpha + R \frac{\partial}{\partial x} v_n^\alpha - \lambda v_n^\alpha)\|_{L_2(Q)^2} < \frac{1}{n}$$

D'altra banda, si $|\alpha|$ és prou gran, $< -\vec{b}, \nabla > w_n^\alpha + < w_n^\alpha, \nabla > (-\vec{b}) = 0$, ja que el suport de $\vec{b}$ és compacte.

Suposem que el suport de v_n^α és a $[-K, K]$. Aleshores el suport de v_n^α i el de w_n^α estan a $I_\alpha = [-K - \alpha, K - \alpha]$. Tenim

$$\|P'(< u, \nabla > w_n^\alpha + < w_n^\alpha, \nabla > u)\|_{L_2(\Omega)^2} \leq \\ \leq \|< u, \nabla > w_n^\alpha + < w_n^\alpha, \nabla > u\|_{L_2(I_\alpha \times (-1,1))^2} \leq \\ \leq 2 \|u\|_{L_4(I_\alpha \times (-1,1))^2} \|\nabla v_n^\alpha\|_{L_4(\Omega)^4} + 2 \|\nabla u\|_{L_4(I_\alpha \times (-1,1))^4} \|v_n^\alpha\|_{L_4(\Omega)^2}.$$

Notem que aquesta expressió tendeix a zero si $|\alpha|$ tendeix a infinit, ja que $\|v_n^\alpha\|_{L_4(\Omega)^2}$ i $\|\nabla v_n^\alpha\|_{L_4(\Omega)^4}$ no depenen de α , i $\|u\|_{L_4(I_\alpha \times (-1,1))^2}$ i $\|\nabla u\|_{L_4(I_\alpha \times (-1,1))^4}$ tendeixen a zero ja que $u \in H^2(\Omega)$ i en conseqüència $u \in L_4(\Omega)^2$ i $\nabla u \in L_4(\Omega)^4$. Prenguem $|\alpha|$ prou gran per tal que aquesta expressió sigui menor que $1/n$.

Finalment, doncs, per cada n existeix un α tal que

$$w_n^\alpha \in D(A_u), \|w_n^\alpha\|_{L_2(\Omega)^2} = 1 \quad i$$

$$\|A_u w_n^\alpha - \lambda w_n^\alpha\|_{L_2(\Omega)^2} < \frac{2}{n}$$

de manera que necessàriament $\lambda \in \sigma(A_u)$.

BIBLIOGRAFIA

- ADAMS, ROBERT A. (1975): "*Sobolev Spaces*". Academic Press. Nova York, San Francisco, Londres.
- AGMON, S., A. DOUGLIS i L. NIREMBERG (1964): "Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II". *Comm. Pure Appl. Math.* 17, pp. 35-92.
- AMICK, Ch. J. (1977): "Steady solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded chanel and pipes". *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, cl. sci. (4)* 4, pp. 473-513.
- BERKER, R. (1963): "Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible", a "*Encyclopedia of Phisics*". Springer-Verlag. Berlín, Göttingen, Heidelberg.
- CALSINA, A. (1981): "Bifurcations genèriques d'atractors en sistemes de reacció i difusió". *Pub. Mat. UAB*, núm. 24, pp. 73-162.
- CATTABRIGA, Lamberto (1961): "Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes". *Rend. Mat. Sem. Univ. Padova*, 31, pp. 308-340.
- CHANG, I-Dee i Robert FINN (1961): "On the solutions of a class of equations occurring in continuum mechanics, with applications to the Stokes Paradox". *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 7, pp. 388-401.
- FINN, Robert i Donald R. SMITH (1967): "On the stationary solutions of the Navier-Stokes equations in two dimensions". *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 25, pp. 26-39.
- GOHBERG, I. C. i M. G. KREIN (1969): *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*". Transl. Math. Monog. vol. 18. An. Math. Soc., Providence, R.I.
- HARDY, G. H., J.E. LITTLEWOOD i G. PÓLYA (1973); "*Inequalities*". Cambridge University Press. (Primera edició, 1934).
- HENRY, D. (1981): "*Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*". Springer-Verlag. Berlín, Heidelberg, Nova York.

- HEYWOOD, J. G. (1976): "On uniqueness questions in the theory of viscous flow". *Acta Math.*, **136**, pp. 61-102.
- IOOSS, G. (1972): "Existence et stabilité de la solution périodique secondaire intervenant dans les problèmes de Navier-Stokes". *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **47**, pp. 301-320.
- IOOSS, G. (1973): "Bifurcation et stabilité". Lecture Notes. Université de Paris XI.
- IOOSS, G., H.B. NIELSEN i H. TRUE (1978): "Bifurcation of the stationary Ekman Flow into a stable periodic flow". *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **68**, pp. 227-256.
- JOSEPH, D.D. i D.H. SATTINGER (1972): "Bifurcating time periodic solutions and their stability". *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **45**, pp. 79-108.
- JOSEPH, D.D. (1976): "*Stability of Fluid Motions*, I i II". Springer-Verlag. Berlín, Heidelberg, Nova York.
- JUDOVICH, V.I. (1971): "Aparició d'auto-oscil·lacions en un fluid" (en rus). *Prikl. Mat. Mek.*, **35**, pp. 450-459. Trad. angl.: *Appl. Math. Mech.*, **35**, pp. 587-603.
- KATO, T. (1966): "*Perturbation Theory for Linear Operators*". Springer-Verlag. Nova York.
- KIRCHGÄSSNER, K. i KIELHÖFER (1973): "Stability and bifurcation in Fluid Dynamics". *Rocky Mountain J. of Math.*, **3**, 275-318.
- LADYZHENSKAYA, O.A. (1969): "*The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*". Gordon and Breach. Nova York, Londres, París. (Primera edició, 1963).
- LADYZHENSKAYA, O.A. i V.A. SOLONNIKOV (1976): "Some problems of Vector Analysis and generalized formulations of boundary-value problems for the Navier-Stokes equations". *Zap. Nauch. Sem. LOMI*, **59**, pp. 81-116 (en rus). Trad. angl.: *J. Soviet Math.*, **10** (2) (1978), pp. 257-286.
- LERAY, J. (1933): "Étude de diverses équations intégrales non lineaires et de quelques problèmes que pose l'Hydrodynamique". *J. Math. Pures Appl.*, **9**, pp. 1-82.
- LIONS, J.L. i E. MAGENES (1968): "*Problèmes aux Limites non Homogènes*", vol. I. Dunod, París.
- MARSDEN, J.E. i M. MCCRAKEN (1976): "*The Hopf Bifurcation and its Applications*". Springer-Verlag. Berlín, Heidelberg, Nova York.
- MORA, X. (1981): "Reaction-Diffusion equations define dynamical systems". Math. Institute. Univ. of Warwick.

- DE RHAM, G. (1960): "*Variétés Differentiables*". Hermann, París.
- RUDIN, W. (1973): "*Functional Analysis*". Mc. Graw-Hill, Nova York.
- SATTINGER, D.H. (1973): "*Topics in Stability and Bifurcation Theory*". Springer-Verlag. Lecture Notes in Math. núm. 309.
- SOLONNIKOV, V.A. (1980): "Questions sobre la resolució dels problemes de contorn i de contorn i valors inicials per a les equacions de Navier-Stokes a dominis amb frontera no compacta" (en rus). *Zap. Nauch. Sem. LOMI*, 96, pp. 288-293.
- TEMAM, Roger (1977): "Navier-Stokes Equations". North-Holland. Amsterdam, Nova York, Oxford.

TAULA

1. INTRODUCCIÓ	9
2. EL PROBLEMA LINEAL	19
3. EL PROBLEMA ESTACIONARI	31
4. EL PROBLEMA DE VALOR INICIAL	45
5. EL PROBLEMA ESPECTRAL	59
6. ALGUNS CÀLCULS SOBRE L'ESPECTRE	71
BIBLIOGRAFIA	97

**ACABAT D'IMPRIMIR
A ROMARGRAF, S.A.
DE L'HOSPITALET DE LLOBREGAT,
EL DIA 1 DE DESEMBRE DE 1986**

